BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(PREMIÈRE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. ÉMILE PICARD, *Président*.

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

A. GUILLET, *Secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Joseph-Bara, n° 1, Paris, VIe.

58798 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

R. Math. B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLII. — ANNÉE 1918.

(LIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179886
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1918

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/bulletindesscien42fran

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JULIA. — ÉTUDE SUR LES FORMES BINAIRES NON QUADRATIQUES A INDÉTERMINÉES RÉELLES OU COMPLEXES, OU A INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES [1].

L'auteur ayant eu comme but déclaré l'interprétation et l'extension de la célèbre méthode de réduction continuelle d'Hermite, rappelons d'abord brièvement celle-ci.

Si $f(x, y)$ est une forme binaire *réelle* dont les racines réelles sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, et les couples de racines imaginaires $\beta_1, \beta'_1, \ldots$, Hermite lui associe la forme quadratique binaire et positive

$$\varphi = t_1^2(x - \alpha_1 y)^2 + t_2^2(x - a_2 y)^2 + \ldots + 2u_1^2(x - \beta_1 y)(x - \beta'_1 y) + \ldots,$$

où les t, u sont des paramètres réels; pour chaque système de valeurs des t, u il réduit φ par une substitution S, qui, appliquée ensuite à f, donne une forme équivalente, F; de là résulte, les t, u variant, un ensemble de substitutions réductrices S, et de formes F.

C'est parmi les F qu'Hermite détermine la réduite définitive de f. A cet effet, il montre (et nous énoncerons les résultats en supposant que f est *arithmétique*, c'est-à-dire à coefficients entiers) que les modules des coefficients de F sont limités en

(1) Ce Mémoire a obtenu en 1917 le prix Bordin. L'analyse qu'on va lire constitue le rapport fait à ce sujet par M. G. Humbert (voir *Comptes rendus*, séance du 10 décembre 1917).

Note de la Rédaction.

fonction d'une quantité positive, θ, qui dépend des t, u; il choisit ceux-ci de manière à rendre θ le plus petit possible, et appelle *déterminant* de f la valeur de ce minimum; la forme φ, dans laquelle les t, u ont les valeurs choisies, est dite la *correspondante* de f, et la forme F, qui dérive de f par la substitution qui réduit la correspondante, est la réduite de f.

Appliquant ces principes aux formes cubiques et aux formes biquadratiques à racines réelles, Hermite obtient d'intéressants résultats arithmétiques et algébriques.

M. Julia, dans la *première Partie* de son travail, a cherché d'abord à caractériser nettement l'ensemble des S et des F, en se plaçant à un point de vue géométrique, et il s'est posé le problème suivant :

Quand les t, u varient, quelle région du demi-plan analytique est décrite par le point représentatif de la forme φ?

La réponse est d'une extrême simplicité : le domaine D cherché est un polygone convexe, limité par des arcs de circonférence normaux à l'axe réel, qui contient à son intérieur ou sur son périmètre tous les points racines de f situés dans le demi-plan; ses sommets sont tous des points racines. On en a une définition absolument précise en passant au plan non euclidien dont le demi-plan est l'image bien connue.

L'auteur en conclut que les S sont les substitutions modulaires qui transforment un point, au moins, de D en un point du domaine fondamental classique, D_0, du groupe modulaire; que les F sont les formes équivalentes à f dont le domaine a au moins un point commun avec D_0; que leur nombre n'est fini, sauf une exception sans intérêt, que dans le seul cas où toutes les racines de f sont imaginaires : on voit quelle clarté est ainsi jetée sur la théorie d'Hermite.

Reprenant ensuite l'étude de la fonction θ, M. Julia établit avec rigueur, en suivant une indication d'Hermite, la limitation des coefficients de F en fonction de θ, et l'existence du minimum de θ; il applique la théorie aux formes cubiques et biquadratiques, déterminant, *dans tous les cas* et avec une remarquable simplicité géométrique, le point représentatif de la correspondante : de là les conditions de réduction d'une forme et, si elle n'est pas

réduite, la substitution réductrice; les calculs effectifs ne peuvent en général se faire que par approximation, puisque les racines de f ne sont pas connues *a priori*, mais on peut pousser l'approximation assez loin pour obtenir toujours une réponse décisive.

La *deuxième Partie* traite des formes binaires complexes qu'Hermite n'avait pas étudiées.

A une telle forme, $f(x, y)$, de racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, l'auteur propose d'associer la forme quadratique positive, *à indéterminées conjuguées*,

$$\varphi = t_1^2 \mathfrak{N}(x - \alpha_1 y) + t_2^2 \mathfrak{N}(x - \alpha_2 y) + \ldots,$$

le symbole $\mathfrak{N}$ étant celui d'une *norme;* pour chaque système (réel) de valeurs des t, il réduit φ, selon les principes d'Hermite, par une substitution S, à coefficients entiers *complexes*, de déterminant *un*, d'où un ensemble de S et de formes fS, ou F, équivalentes à f.

L'interprétation géométrique se fait dans le demi-espace, divisé en domaines du *groupe de Picard :* les t variant, le point représentatif de φ décrit un polyèdre convexe, D, à faces sphériques, orthogonales au plan base du demi-espace, et dont les sommets sont les points racines de f, situés tous dans ce plan; les S et les F se caractérisent alors comme dans le cas réel, le *domaine fondamental* ordinaire du groupe de Picard jouant ici le rôle de D_0.

Pour choisir une *réduite* parmi les F, M. Julia introduit encore le minimum, dit *déterminant* de f, d'une fonction, θ, des t; il en tire la notion de la forme φ, *correspondante* de f, et celle de la F qui est la réduite cherchée; il montre que les modules des coefficients de celle-ci sont limités en fonction du déterminant, retombant ainsi sur un cas particulier d'un théorème célèbre de M. Jordan.

Après quelques remarques intéressantes sur les propriétés de *covariance* de la correspondante par rapport à la forme f, l'auteur, en regardant les formes réelles comme un cas spécial des formes complexes, donne l'explication d'un fait « important » qui avait frappé Hermite, sans qu'il pût en « découvrir la raison générale », à savoir que l'expression du *déterminant* en fonction des racines d'une forme réelle reste la même quel que soit le nombre de

racines imaginaires, et bien que les calculs de vérification diffèrent profondément selon ce nombre.

Enfin, la deuxième Partie se termine par l'étude complète des formes cubiques et biquadratiques complexes; l'auteur y rencontre des théorèmes de géométrie non euclidienne d'une extrême élégance, grâce auxquels il détermine simplement et nettement le point représentatif de la correspondante, point dont la position dans le demi-espace lui fournit immédiatement la substitution réductrice de la forme initiale.

La *troisième Partie*, quoiqu'elle ne concerne que des formes particulières, et principalement celles qui se décomposent en un produit de formes quadratiques à indéterminées conjuguées (formes d'Hermite), offre des résultats curieux et nouveaux.

Les plus simples se rapportent aux formes $f = f_1 f_2$, où f_1 et f_2 sont deux formes d'Hermite : à f, M. Julia associe la forme d'Hermite, toujours définie, $\varphi = t_1^2 \varphi_1 + t_2^2 \varphi_2$; φ_i est la forme f_i elle-même, si celle-ci est définie; sinon, c'est la forme quadratique définie la plus générale dont le point représentatif est sur la demi-sphère représentative de f_i, et que M. Picard a déjà considérée.

Grâce à ce choix heureux de φ, l'auteur peut montrer que, t_1 et t_2 variant, le point représentatif de φ décrit, dans le demi-espace, un domaine polyédral, limité, en général, par des portions de *sphère* et des portions de *cyclide* de Dupin : c'est la première fois que cette cyclide apparaît dans l'Algèbre et l'Arithmétique. De là résulte encore un ensemble de substitutions S du groupe de Picard, et de F équivalentes à f, avec une interprétation géométrique simple et une généralisation des notions de déterminant, de correspondante, de réduite.

Au cours de la recherche, M. Julia établit ce résultat important que, si deux formes indéfinies d'Hermite ont leurs demi-sphères, σ_1 et σ_2, sécantes, les deux groupes automorphes, à cercle principal, qui sont liés respectivement, d'après M. Picard, aux transformations semblables de ces formes, ont en commun un sous-groupe cyclique, formé par les puissances d'une substitution hyperbolique; grâce à ce théorème et à une réciproque, il ramène les formes f à des types canoniques très simples, et en déduit une théorie sans lacunes de la réduction, tant pour les formes f que

pour d'autres formes qui leur sont apparentées et qui se présentent naturellement dans la discussion.

M. Julia, enfin, donne la solution complète du problème suivant : « Trouver *toutes* les formes binaires, *à indéterminées conjuguées*, et de degré supérieur à *deux*, qui restent invariantes par un groupe de substitutions linéaires » : l'analogie avec les formes binaires ordinaires faisait penser qu'on ne rencontrerait que des formes répondant aux groupes *finis* classiques; à côté de celles-là, l'auteur en découvre d'autres, d'ailleurs décomposables, qui restent inaltérées par les substitutions d'un groupe *infini* cyclique; elles se rattachent au théorème que nous avons signalé plus haut.

En résumé, dans les deux premières Parties de son remarquable travail, l'auteur développe, avec toutes ses conséquences, une interprétation géométrique des méthodes de réduction continuelle, celle d'Hermite d'abord, celle ensuite qu'il propose lui-même dans le champ complexe; cette interprétation, d'une rare simplicité, rend intuitives bien des propriétés de la réduction et prendra place à côté de celles, classiques aujourd'hui, mais applicables au seul cas quadratique, qu'ont fait connaître Stephen Smith et M. Bianchi; elle apporte à l'Arithmétique des formes de degré supérieur un perfectionnement important, dont les applications aux formes cubiques et biquadriques soulignent l'intérêt.

La troisième Partie, d'une inspiration analogue, conduit, sur bien des points, à des résultats neufs et inattendus; l'auteur continue à s'y montrer ingénieux et habile dans le maniement des théories combinées de l'Arithmétique, de l'Analyse et de la Géométrie, fusion heureuse qui semble la marque de son talent.

GEORGES HUMBERT.

MYRBERG (P.-J.). — ZUR THEORIE DER KONVERGENZ DER POINCARÉ SCHEN REIHEN. (*Sur la théorie de la convergence de séries de Poincaré.*) Akademische Abhandlung. Grand in-8°, 75 pages. Helsingfors, Buchdruckerei-Aktiengesellschaft Sana, 1916.

On sait que Poincaré démontre l'existence des fonctions automorphes à l'aide de certaines séries de la forme

$$\theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

$H(z)$ désignant une fonction rationnelle de z, la sommation étant étendue sur toutes les substitutions d'un groupe discontinu. Le quotient de deux séries théta de cette forme correspondant à un même groupe et à une même valeur de l'entier m sera, en effet, une fonction automorphe.

Poincaré démontre, par une méthode ingénieuse, que les séries théta convergent absolument, si $m > 1$, mais il a laissé de côté le cas $m = 1$. L'auteur s'occupe maintenant de ce cas qui mérite quelque attention parce qu'on arrive, si $m = 1$, d'une manière particulièrement simple aux expressions des intégrales abéliennes qui se rattachent au groupe.

Ce fait a déjà attiré l'attention de plusieurs géomètres. MM. Burnside et Ritter ont démontré que la série

$$\sum \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2} \tag{1}$$

converge absolument s'il s'agit d'un groupe fuchsien de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille.

M. Schottky a étudié un groupe kleinéen dont le polygone générateur est limité par $2p$ cercles qui sont extérieurs l'un à l'autre. Ce polygone engendre un groupe discontinu dont les substitutions fondamentales sont hyperboliques ou loxodromiques. M. Schottky a démontré que la série de la forme (1) qui correspond à ce groupe est absolument convergente si l'on impose au polygone générateur une certaine condition.

L'auteur a su remplacer cette condition par une autre qui est moins restrictive. Cette nouvelle condition de convergence lui permet de démontrer que parmi les groupes engendrés par le polygone susdit il y en a *toujours* une infinité qui sont tels que la série (1) converge absolument.

Mais il arrive que la série diverge. M. Myrberg démontre, en effet, qu'il existe des groupes kleinéens ayant un polygone générateur de la forme susdite et tels que la série n'est pas absolument convergente.

Citons un cas particulier où la condition de convergence s'énonce d'une manière très simple. Supposons que les $2p$ cercles qui limitent le polygone générateur ont le même rayon r. Soit e

la plus petite des distances entre les centres de deux de ces cercles. La série (1) converge absolument si l'on a

$$\frac{e}{r} > \sqrt{2p-1} + \frac{1}{\sqrt{2p-1}}.$$

N.-E. Nörlund.

WHITTAKER (E.-T.). — A Treatise on the analytical Dynamics of particles and rigid bodies, with an introduction to the Problem of three bodies. Second edition. 1 vol. grand in-8°, xiii-432 pages. Cambridge, University Press, 1917.

La première édition de cet intéressant Traité a paru en 1904. Dans l'Analyse donnée peu après (ce *Bulletin*, 2e série, t. XXIX, 1905, p. 80-84) par le regretté Jules Tannery, le plan et le caractère de l'Ouvrage actuel sont trop bien indiqués pour qu'il soit nécessaire d'y revenir.

M. Whittaker a complété et remanié en différents points sa rédaction primitive. Indiquons, en quelques mots, l'une des additions les plus intéressantes, celle qui concerne le Chapitre XI : *Théorie des transformations en Dynamique*. Elle a été motivée, nous dit l'auteur, « par le désir de rendre justice au premier des grands travaux que nous devons au génie d'Hamilton ».

L'origine de certaines méthodes fondamentales de Dynamique y apparaît dans l'étude d'une question d'Optique. Tout d'abord, le principe de Fermat et celui de la moindre action montrent que les courbes dessinées respectivement par les rayons lumineux et par le mouvement d'un point libre (sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel) sont les extrémales correspondant à deux intégrales de même forme; le problème de Dynamique est donc susceptible d'une interprétation optique.

Soient maintenant σ et Σ deux surfaces, positions d'une même onde lumineuse aux instants t et t'; Σ se déduit de σ par une transformation de contact (T), traduction mathématique du principe de Huygens. On peut écrire les équations finies (E) de cette transformation à l'aide de la fonction $V(x, y, z; x', y', z')$ exprimant la durée de transmission de la lumière entre les deux points x, y, z, x', y', z' du milieu. Si l'intervalle de temps $t' - t$ est infi-

niment petit, la transformation (T) est infinitésimale, le équations précédentes conduisent à des équations différentielles (E′), de forme canonique, dont les intégrales sont données par les équations finies (E).

Cette façon intuitive de faire pressentir que l'intégration des équations de la Dynamique se ramène à la détermination d'une seule fonction inconnue mérite assurément de rester classique.

Signalons encore le paragraphe 181 : *Régularisation du problème des trois corps*. Il donne, en quelques lignes, une idée très nette de la contribution fondamentale apportée par M. Sundmann à cette importante question.

Dans tout le cours du Traité, on s'aperçoit d'ailleurs que M. Whittaker s'est efforcé de tenir son lecteur au courant des nombreux travaux parus depuis 1904. Il a réussi pleinement à conserver le caractère d'actualité scientifique à son livre, qui est, en somme, un guide fort utile pour conduire des régions classiques à celles explorées par les travaux les plus récents.

E. Cotton.

MÉLANGES.

SOURCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX UNIAXES;

PAR M. MARCEL BRILLOUIN.

1. *Équations générales.* — J'écris les équations du champ électrique E et du champ magnétique M dans les milieux uniaxes, ayant pour axes les parallèles à Oz, en unités électromagnétiques :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} + 4\pi j_1 &= \frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial y},\\ \frac{1}{a^2}\frac{\partial E_2}{\partial t} + 4\pi j_2 &= \frac{\partial M_3}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial z},\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial t} + 4\pi j_3 &= \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial x};\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial M_1}{\partial t} &= \frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial y},\\ -\frac{\partial M_2}{\partial t} &= \frac{\partial E_3}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial z},\\ -\frac{\partial M_3}{\partial t} &= \frac{\partial E_1}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

Les indices 1, 2, 3 se rapportent aux directions x, y, z.

a, c sont les deux vitesses de propagation principales.

j est la densité de courant électrique.

Il m'arrivera d'appeler le premier groupe d'équations *équations d'Ampère-Maxwell*, et le second groupe *équations de Faraday*. J'ai écrit le second groupe sous la forme isotrope qui convient à presque tous les milieux optiques connus, en adoptant la même perméabilité magnétique (*un*) dans toutes les directions.

On a en outre

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Div.}\,M &= 0,\\ \mathrm{Div.}\,j &= -\frac{\partial e}{\partial t},\\ \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial z} &= -4\pi e,\end{aligned}\right.$$

en appelant e la densité électrique en volume en chaque point.

Dans un milieu parfaitement isolant, les densités du courant j et les densités de charge e sont nulles partout où il n'y a pas de sources extérieures.

Je ne m'occuperai que de ces milieux transparents.

2. *Équilibre.* — Des équations (II) on déduit que la force électrique dérive d'un potentiel V, lorsque le milieu est en équilibre : la dernière équation (III) détermine ce potentiel

$$\text{(IV)} \qquad \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 V}{dx^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\square V=0.$$

Une source ponctuelle simple à l'origine est alors donnée par

$$\text{(V)} \qquad \left\{\begin{array}{l} V=a^2\dfrac{e}{R}, \qquad R^2=\dfrac{a^2}{c^2}(x^2+y^2)+z^2, \\ E_1=-\dfrac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_2=-\dfrac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_3=-\dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ M_1=M_2=M_3=0. \end{array}\right.$$

La polarisation du milieu est

$$\frac{E_1}{a^2}, \quad \frac{E_2}{a^2}, \quad \frac{E_2}{c^2},$$

et le flux de polarisation à travers la sphère de rayon r autour de l'origine est $4\pi e$, comme on s'en assure facilement ; la charge centrale est e.

Remarque. — Il est important pour la suite de remarquer que l'on obtient encore une intégrale de degré -1, mais accompagnée de singularités plus étendues, en multipliant la précédente par une intégrale homogène quelconque de degré *zéro*, U_0,

$$\text{(1)} \qquad V=a^2 U_0 \frac{e}{R}.$$

On s'en assure facilement, en tenant compte de la propriété fondamentale des fonctions homogènes de degré *zéro*,

$$x\frac{\partial U_0}{\partial x}+y\frac{\partial U_0}{\partial y}+z\frac{\partial U_0}{\partial z}=0.$$

Parmi ces fonctions, nous aurons à utiliser en particulier les sui-

vantes

$$(2)\qquad \frac{Rx}{x^2+y^2}, \qquad \frac{Ry}{x^2+y^2},$$

quoique sur l'axe Oz ($x = y = 0$, $z \neq 0$) elles deviennent infinies comme $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Doublets. — *Au point de vue physique, les seules sources importantes sont les doublets électriques, formés de deux masses égales et contraires à petite distance l'une de l'autre.* Un doublet est défini par son *moment électrique* ε, dont il faut donner la direction à l'aide de ses composantes ε_1, ε_2, ε_3,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} V_1 &= -a^2\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = \varepsilon_1\frac{a^4}{c^2}\frac{x}{R^3},\\ V_2 &= -a^2\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) = \varepsilon_2\frac{a^4}{c^2}\frac{y}{R^3},\\ V_3 &= -a^2\varepsilon_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = \varepsilon_3\, a^2\frac{z}{R^3}.\end{aligned}\right.$$

Le moment positif a la direction de l'axe positif.

Ce qui fait l'importance des doublets c'est que, dans l'état variable, le courant nécessaire pour la variation des charges est confiné, entre les deux charges opposées, le long d'un élément de longueur.

Une source électrique isotrope, au contraire, ne peut varier que sous l'influence d'un courant venant d'une distance infinie, qui constitue une singularité linéaire à travers tout l'espace.

C'est donc bien le doublet qui, dans l'état variable, constitue la véritable singularité ponctuelle, malgré la petite complication due à son caractère vectoriel.

Au point de vue mathématique, l'avantage de prendre comme source ponctuelle le doublet et non le point provient de l'existence des relations (III) qui réduisent au quatrième ordre au lieu du sixième l'équation aux dérivées partielles fondamentale.

Remarque. — Près de l'origine, les forces électriques dues au doublet deviennent infinies comme $\frac{1}{R^3}$; les forces qui ne de-

viennent infinies que comme $\frac{1}{R^2}$ caractériseraient une charge électrique résiduelle si leur flux sphérique n'était pas nul. Pour un doublet pur, le caractère essentiel des termes de degré d'infinitude 2. 1. 0 est de donner un flux sphérique nul.

3. *État variable.* — Avant d'aborder le cas général d'une variation suivant une loi quelconque en fonction du temps, il est utile de traiter quelques cas particuliers. Le plus simple de tous est celui du doublet dont le moment croît proportionnellement au temps; l'élément de courant qui joint les deux charges électriques est alors constant, et le champ magnétique est permanent.

Posons

$$\varepsilon = t\varepsilon'$$

en désignant par ε' la vitesse d'accroissement du moment du doublet, qui est aussi le produit de l'intensité du courant par la distance qui sépare les deux masses.

Le champ magnétique étant constant, les équations (II) montrent qu'il y a encore un potentiel des forces électriques, déterminé par l'équation (1). Pour un doublet d'orientation quelconque ce potentiel, donné par les formules (3), est

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} V_1 &= -a^2 t\varepsilon'_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right),\\ V_2 &= -a^2 t\varepsilon'_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right),\\ V_3 &= -a^2 t\varepsilon'_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),\end{aligned}\right.$$

suivant la direction de son axe.

Ce sont les équations (I) qui serviront à déterminer le champ magnétique, toujours soumis, en outre, à la condition (III),

$$\text{Div. M} = 0.$$

Pour cette détermination, le rôle spécial de l'axe de symétrie Oz rend utile d'étudier séparément :

1° Un doublet axial (V_3);
2° Un doublet équatorial (V_1).

On obtiendra par permutation le second doublet équatorial (V_2),

et en associant trois doublets on aura par addition vectorielle le champ magnétique dû à un doublet d'orientation quelconque.

4. *Doublet axial.* — Les équations (1) donnent pour déterminer le champ magnétique

$$(\mathrm{I}')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial y} &= +\varepsilon'_3 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),\\ \frac{\partial M_3}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial z} &= +\varepsilon'_3 \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),\\ \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial x} &= +\varepsilon'_3 \frac{a^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right), \end{aligned}\right.$$

avec

$$\mathrm{Div.}\,M = 0.$$

On voit de suite qu'on satisfait à toutes les conditions en prenant

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= -\varepsilon'_3 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right),\\ M_2 &= +\varepsilon'_3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right),\\ M_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

La troisième des équations (I') devient identique à l'équation (IV).

Cette distribution circulaire autour de l'axe du doublet est aussi simple que dans un milieu isotrope, bien que la distance R caractérise un ellipsoïde de révolution au lieu d'une sphère.

5. *Doublet équatorial* (1). — Le champ de ce doublet est plus compliqué; quoique le milieu soit magnétiquement isotrope, les courants de polarisation de Maxwell,

$$\frac{1}{4\pi a^2}E'_1,\quad \frac{1}{4\pi a^2}E'_2,\quad \frac{1}{4\pi c^2}E'_3,$$

dans le milieu ayant une distribution réglée par l'ellipsoïde de polarisation diélectrique d'axes a, c, le champ magnétique dû à un doublet équatorial ne peut pas être de révolution autour de l'axe du doublet. Sa distribution dépend de deux axes de symétrie distincts : l'axe de symétrie du milieu Oz et celui du doublet Ox, par exemple.

Les équations sont :

$$(\mathrm{I}'')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial y} &= \varepsilon'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right), \\ \frac{\partial M_3}{\partial x} - \frac{\partial M_1}{\partial z} &= \varepsilon'_1 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{R}\right), \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial x} &= \varepsilon'_1 \frac{a^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{R}\right); \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{Div.}\, M = 0.$$

On satisfait aux trois premières équations en prenant

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = -\frac{a^2}{c^2}\varepsilon'_1\left(\frac{1}{R}\right)'_z, \qquad M_3 = \varepsilon'_1\left(\frac{1}{R}\right)'_y,$$

mais la divergence n'est pas nulle; il faut donc poser

$$M_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$M_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{a^2}{c^2}\varepsilon'_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$M_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \varepsilon'_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)$$

et déterminer Φ par la condition

$$\Delta\Phi + \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = 0.$$

Nous déterminerons au prochain paragraphe une intégrale L de l'équation

$$(\mathrm{VI})\qquad \Delta L = \frac{a^2 - c^2}{c^2}\frac{1}{R},$$

qui reste finie dans tout l'espace, sauf à distance infinie, et dont les dérivées n'ont de singularité qu'à l'origine des coordonnées. Il suffit alors de prendre

$$(\mathrm{VII})\qquad \Phi = \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z}$$

pour satisfaire à toutes les conditions.

En effectuant la dérivation par rapport à y, on a la forme

$$(\mathrm{VII}')\qquad \Phi = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{y}{x^2 + y^2}(R - r)\right]$$

qui se prête à une vérification immédiate, pour chacun des termes séparément.

Enfin, si l'on se rappelle que l'on a

$$(6) \qquad R^2 - r^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}(x^2 + y^2),$$

on arrive à la forme

$$(7) \qquad \Phi = \frac{a^2 - c^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{R + r}\right) = -\frac{a^2 - c^2}{c^2}\frac{yz}{rR}\frac{1}{R + r},$$

sur laquelle il est évident qu'il n'y a d'autre point singulier que l'origine.

On obtient ainsi facilement

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} M_1 &= \frac{a^2 - c^2}{c^2}\varepsilon'_1\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{y}{R + r}\right), \\ M_2 &= \frac{a^2 - c^2}{c^2}\varepsilon'_1\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{y}{R + r}\right) - \frac{a^2}{c^2}\varepsilon'_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right), \\ M_3 &= \frac{a^2 - c^2}{c^2}\varepsilon'_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{y}{R + r}\right) + \varepsilon'_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned}\right.$$

Tel est le champ magnétique développé dans un uniaxe (z) par un élément de courant équatorial constant à l'origine, dirigé suivant l'axe des x.

Au champ à circulation elliptique s'ajoute un champ dérivé d'un potentiel, qui n'indique néanmoins la présence d'aucune masse ou d'aucun doublet magnétique.

C'est un champ bien plus compliqué que dans un milieu isotrope; il y aurait grand intérêt à faire le contrôle expérimental de l'exactitude de ces formules.

6. *Équation* $\square\Delta = 0$. — L'équation (VI) du numéro précédent est en réalité une forme de l'équation

$$(\mathrm{VI}') \qquad \square\Delta L = 0,$$

déjà à moitié intégrée pour une source ponctuelle à l'origine. Cette équation donne en effet, dans ce cas,

$$\Delta L = \frac{\Lambda}{R},$$

comme on l'a déjà remarqué au n° 2.

Pour aller plus loin, remarquons que l'opérateur $\square$ peut s'écrire

$$\square = \frac{c^2}{a^2}\Delta + \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

on a donc

$$(9) \qquad \Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right);$$

Si l'on a choisi A égal à $\frac{a^2 - c^2}{c^2}$, on a par comparaison avec (VI)

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = -\frac{1}{R}.$$

Sous cette forme, l'intégration est immédiate. On obtient d'abord

$$(11) \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2}\log\frac{R - z}{R + z} - \frac{1}{2}\log\frac{r - z}{r + z};$$

le second terme, qui satisfait à $\Delta = 0$, est ajouté pour faire disparaître la singularité que le premier terme pris seul laisserait subsister sur tout l'axe Oz.

Intégrant une seconde fois, on obtient

$$(\text{VIII}) \qquad L = R - r + \frac{z}{2}\log\left(\frac{R - z}{R + z}\,\frac{r + z}{r - z}\right).$$

Sur l'axe Oz, L reste fini et égal à $\frac{z}{2}\log\frac{a}{c}$ du côté positif de l'axe des z, et à $-\frac{z}{2}\log\frac{a}{c}$ du côté négatif. Au voisinage de l'origine, mettons en évidence l'angle zénithal θ, ainsi que la distance r; il vient

$$L = r\left[\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\sin^2\theta + \cos^2\theta} - 1 + \cos\theta\log\left(a\,\frac{1 + \cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta} + c\cos\theta}\right)\right].$$

Quelle que soit la direction θ, L tend vers zéro avec r. La fonction L ainsi construite contient R et r symétriquement. On trouve facilement, comme il a été dit au numéro précédent,

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}(R - r).$$

7. *État variable quelconque. — Équations générales.* — C'est le champ électrique qui nous intéresse le plus: éliminons

donc la force magnétique entre les équations (I) et (II); il vient

$$(\mathrm{IX})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + 4\pi\frac{\partial j_1}{\partial t} = \Delta E_1 - \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Div.\,E},\\ &\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + 4\pi\frac{\partial j_2}{\partial t} = \Delta E_2 - \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{Div.\,E},\\ &\frac{1}{c_2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} + 4\pi\frac{\partial j_3}{\partial t} = \Delta E_3 - \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{Div.\,E},\end{aligned}\right.$$

avec

$$(\mathrm{III}')\quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial z} = -4\pi e,$$

d'où

$$(\mathrm{X})\quad \mathrm{Div.\,E} = -4\pi a^2 e + \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial E_3}{\partial z}.$$

Hors de la source, les e et les j sont nuls.

Ces équations permettent de séparer les ondes en deux groupes, l'un ordinaire pur, l'autre extraordinaire pur. L'équation (X) portée dans les équations (IX) donne, hors de la source,

$$(\mathrm{XI})\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial x\,\partial z} = 0,\\ &\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_2 - \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial y\,\partial z} = 0,\\ &\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_3 - \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial z^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

La dernière équation montre que la force E_3 axiale se propage entièrement par l'onde extraordinaire; les deux autres équations déterminent ensuite E_1 et E_2. On peut aussi tout ramener à la détermination directe d'une seule fonction Ψ, ponctuelle, non vectorielle, quoique non isotrope.

Les équations (XI) nous conduisent à prendre

$$(\mathrm{XIII})\quad \left\{\begin{aligned} &E_1 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial_2 \Psi}{\partial x\,\partial z}, \qquad E_2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\,\partial z},\\ &E_3 = \left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi,\end{aligned}\right.$$

avec

$$(\mathrm{XIV})\quad \left(\Delta + \frac{a^2 - c^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = 0.$$

8. *Étude de l'équation* (XIV). — L'équation (XIV) est l'équation fondamentale dans l'étude des états variables des uniaxes. Chacune des trois composantes du champ électrique y satisfait séparément; chacune aussi des composantes du champ magnétique. Deux quelconques de ces composantes peuvent être des intégrales choisies arbitrairement de l'équation (XIV), mais la troisième composante du champ électrique ou du champ magnétique est une solution liée aux deux autres par l'équation de divergence. C'est ce qui fait la difficulté du problème électromagnétique. C'est aussi ce qui rend important d'indiquer dès à présent quelques intégrales utiles de cette équation.

La solution fondamentale, celle qui correspondrait à une vraie source ponctuelle si les équations de divergence du problème électrique ne s'opposaient pas à son existence, est

$$\Psi = \frac{F(R - at)}{R} + \frac{f(r - at)}{r} \tag{XV}$$

en se bornant à l'émission, sans absorption.

Mais cette intégrale n'est pas la seule importante.

On montre facilement, comme au n° 2, que l'équation

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_0 = 0$$

est encore satisfaite par

$$\varphi = U_0 \frac{f(r - at)}{r},$$

en prenant pour U_0 une fonction harmonique homogène, de degré zéro, quelconque,

$$\Delta U_0 = 0.$$

Il est vrai que l'on introduit ainsi des singularités supplémentaires; mais on peut introduire les mêmes dans la solution qui correspond au facteur symbolique extraordinaire, à l'aide d'une fonction harmonique de $\frac{a}{c}x, \frac{a}{c}y, z$, homogène de degré zéro, U_e,

$$\left(\Delta + \frac{a^2 - c^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U_e = 0,$$

avec

$$\varphi_e = U_e \frac{F(R - at)}{R};$$

il faut seulement associer convenablement les fonctions U et U_e, F et f.

Prenons, par exemple,

$$U_0 = \frac{rx}{x^2+y^2}, \qquad U_e = \frac{Rx}{x^2+y^2}$$

et

$$\Psi_x = \frac{x}{x^2+y^2}[G(R-at) - G(r-at)]. \tag{XVI}$$

Cette fonction paraît devenir infinie tout le long de l'axe Oz; mais il n'en est rien. On a, en effet,

$$G(R-at) - G(r-at) = G'(z-at) \times \frac{a^2-c^2}{2c^2}\,\frac{x^2+y^2}{z} + \ldots.$$

d'où, au voisinage immédiat de l'axe Oz,

$$\Psi_x = \frac{a^2-c^2}{2c^2}\,\frac{x}{z}\,G'(z-at) + \ldots \tag{12}$$

qui n'a plus de singularité sur l'axe.

Près de l'origine, x, y, z sont tous très petits, et l'on a

$$G(R-at) - G(r-at) = (R-r)G'(-at) + \ldots,$$

d'où

$$\Psi_x = \frac{x}{R+r}\,\frac{a^2-c^2}{c^2}\,G'(-at) + \ldots. \tag{13}$$

Ψ_x reste donc fini même à l'origine.

La fonction Ψ_x (XVI) reste donc finie dans tout l'espace, axe et origine compris.

Il en est de même de la fonction Ψ_y que l'on obtient en permutant x et y, ainsi que des fonctions

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}G(R-at)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}G(r-at)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{x^2+y^2}G(R-at)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{x^2+y^2}G(r-at)\right],$$

.....

Nous trouverons l'application de ces fonctions pour les doublets équatoriaux.

9. *Doublet axial.* — En comparant les formules (XIII) à celles qui conviennent pour les doublets variables en milieu isotrope, nous pouvons présumer qu'elles s'adapteront bien à la représentation d'un doublet variable orienté suivant l'axe de symétrie. Il suffit de prendre

$$\Psi = \frac{a^2 c^2}{c^2 - a^2} \frac{F(R - at)}{R}$$

pour représenter un doublet dont le moment variable est $F(-at)$. On a alors dans tout l'espace

$$\text{(XVII)} \quad \begin{cases} E_1 = a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\dfrac{F}{R}\right), \qquad E_2 = a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\left(\dfrac{F}{R}\right), \\ E_3 = a^2 \left[\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\left(\dfrac{F}{R}\right); \end{cases}$$

c'est la même forme que dans les milieux isotropes.

Toutes les conditions (équations différentielles générales et forme limite à l'origine) sont satisfaites. Le second terme de E_3, comme dans les milieux isotropes, est dû à la variation de l'élément de courant entre les pôles du doublet variable. On forme facilement le champ magnétique dû à ce doublet, à l'aide des équations (II) (de Faraday) :

$$M_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F}{R}\right),$$

$$M_2 = +\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F}{R}\right),$$

$$M_3 = 0.$$

C'est une forme toute semblable à celle qui convient aux milieux isotropes, à part la coordination par surfaces d'onde ellipsoïdes (R) au lieu de surfaces sphériques.

Cette simplicité de résultats tient à la coïncidence de l'axe du doublet avec l'axe du milieu. Nous obtiendrons des formules plus compliquées pour les doublets équatoriaux.

10. *Doublet équatorial.* — Laissons-nous guider par l'analogie statique, en admettant que c'est la composante suivant l'axe de

révolution dont la forme reste aussi simple que dans un milieu isotrope. Pour un doublet suivant l'axe des x, nous adoptons la forme

$$\text{(XVIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= \Phi_1 + \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2}, \\ E_2 &= \Phi_2 + \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x\, \partial y}, \\ E_3 &= \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x\, \partial z}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$(14) \qquad \Phi_e = -a^2 \frac{F(R - at)}{R}.$$

Les termes en Φ_e donnent la partie du champ qui correspond aux charges du doublet de moment $F(-at)$, comme on le voit en comparant avec la première des formules statiques (3).

Les fonctions Φ_1, Φ_2 ne doivent introduire aucune singularité nouvelle; en particulier, comme il a été remarqué à la fin du n° 2, leur ordre d'infinitude à l'origine ne doit pas dépasser 2, et même les termes de cet ordre doivent donner un flux sphérique nul. Ces fonctions sont définies à l'aide des deux premières équations (XI) et de l'équation (III)

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_1 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2}\frac{\partial^4 \Phi_e}{\partial x^2\, \partial t^2} &&= 0, \\ &\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2}\frac{\partial^4 \Phi_e}{\partial x\, \partial y\, \partial t^2} &&= 0, \\ &\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \qquad + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^3 \Phi_e}{\partial x\, \partial t^2} &&= 0, \end{aligned} \right.$$

en tenant compte de l'équation en Φ_e

$$\left(\Delta + \frac{a^2 - c^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_e = 0.$$

Ces trois équations sont compatibles et se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^3 \Phi_e}{\partial x\, \partial t^2},$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) = 0.$$

Sous cette forme, il est indiqué de poser

$$(\text{XIX})\qquad \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ \Phi_2 = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \end{cases}$$

ce qui sépare les équations en φ_0 et ψ,

$$(\text{XX})\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^3 \Phi_c}{\partial x\,\partial t^2}, \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\Delta - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Ce n'est que par l'association des deux fonctions ψ et φ_0 que l'on peut éviter toute singularité de Φ_1 et Φ_2 dans l'espace entier, en particulier sur l'axe Oz qui joue dans chacune d'elles un rôle spécial, comme le montrent évidemment les équations (XX).

11. *Les équations* (XX). — Cherchons d'abord la fonction ψ. Nous la formerons facilement à l'aide du changement de variables classique

$$\xi = x + yi, \qquad \eta = x - yi$$

qui transforme la première équation (XX) en

$$(16)\qquad 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi\,\partial \eta} = +\frac{a^4}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\frac{F''(R - at)}{R}$$

après avoir remplacé Φ_c par sa valeur (14) et effectué la dérivation par rapport au temps. On a en même temps

$$(17)\qquad R^2 = \frac{a^2}{c^2}\xi\eta + z^2.$$

Considérons d'abord l'équation plus simple

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi\,\partial \eta} = \frac{F''(R - at)}{R}$$

et intégrons par rapport à η en laissant ξ constant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} &= \int \frac{F''(R - at)}{R}\,d\eta \\ &= \frac{1}{\xi}\int \frac{F''(R - at)\xi\,d\eta}{R}. \end{aligned}$$

Mais, puisque ξ et ζ restent constants pendant cette intégration, on a en différentiant l'équation (17)

$$2R\,dR = \frac{a^2}{c^2}\xi\,d\eta$$

et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}\int F''(R-at)\frac{2c^2}{a^2}\,dR,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}\,\frac{2c^2}{a^2}F'(R-at). \tag{19}$$

On aura de même

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta}\,\frac{2c^2}{a^2}F'(R-at). \tag{20}$$

Comparons l'équations (16) et l'équation (18); on a évidemment

$$\psi = \frac{a^2}{4c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta}\right)F'(R-at), \tag{21}$$

ou, en revenant à x et y,

$$\psi = a^2\frac{x}{x^2+y^2}F'(R-at). \tag{22}$$

12. Quant à la seconde équation (XX), on voit immédiatement qu'elle est satisfaite par une fonction *ordinaire* analogue; on prendra donc

$$\varphi_0 = \frac{Ax+By}{x^2+y^2}F'(r-at), \tag{23}$$

et l'on choisira les constantes A, B, de manière à éviter, comme il a été dit au numéro précédent, toute singularité, sur l'axe Oz, dans Φ_1 et Φ_2. On reconnaît aisément qu'il faut poser, pour cela,

$$A = 0, \qquad B = a^2. \tag{24}$$

On aura donc finalement

$$\text{(XXI)}\quad \begin{cases} \Phi_1 = a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{x}{x^2+y^2}F'(R-at)\right] + a^2\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{y}{x^2+y^2}F'(r-at)\right], \\ \Phi_2 = a^2\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{x}{x^2+y^2}F'(R-at)\right] - a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{y}{x^2+y^2}F'(r-at)\right]. \end{cases}$$

Vérifions seulement les valeurs limites. Près de l'axe Oz, les

principaux termes sont

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{a^2+c^2}{2c^2}\,\frac{F''(-at)}{z}\left(1+\frac{a^2-c^2}{4c^2}\,\frac{y^2-x^2}{z^2}+\ldots\right)\\ &\quad+\frac{F'''(-at)}{8}\left(\frac{a^4}{c^4}\,\frac{3x^2+y^2}{z^2}+\frac{3y^2+x^2}{z^2}+\ldots\right)+\ldots,\\ \Phi_2 &= -\frac{a^4-c^4}{4c^4}\,\frac{xy}{z^2}\left[\frac{F''(-at)}{z}-F'''(-at)\right]+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Tous deux restent finis quand x et y tendent vers zéro, z restant fini.

Près de l'origine, les principaux termes de Φ_1 et Φ_2 sont

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{a^2r+c^2R}{c^2(R+r)}\left[\frac{y^2}{x^2+y^2}\,\frac{1}{r}+\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{1}{R}\right]F''(-at)\\ &\quad+\frac{a^2+c^2}{2c^2}\,F'''(-at)+\ldots,\\ \Phi_2 &= -\left[\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{Rr}\,\frac{a^2}{c^2}\right]\frac{a^2-c^2}{c^2}\,\frac{F''(-at)}{R+r}+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Il ne subsiste aucun terme du second ordre d'infinitude, mais seulement des termes du premier ordre, dont le flux est nul.

13. *Champ électromagnétique du doublet équatorial.* — Rapprochons les formules (XXI) des formules (XVIII), nous obtenons pour un doublet équatorial suivant l'axe des x, de moment variable $F(-at)$,

$$(\mathrm{XXII})\quad \left\{\begin{aligned} E_1 &= a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_c}{R}\right)+\frac{x}{x^2+y^2}F'_c\right]+a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}F'_0\right),\\ E_2 &= a^2\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_c}{R}\right)+\frac{x}{x^2+y^2}F'_c\right]-a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}F'_0\right),\\ E_3 &= a^2\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_c}{R}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

en posant

$$(\mathrm{XXIII})\quad \left\{\begin{aligned} F_c &= F(R-at), & F_0 &= F(r-at),\\ R^2 &= \frac{a^2}{c^2}(x^2+y^2)+z^2, & r^2 &= x^2+y^2+z^2. \end{aligned}\right.$$

Pour former le champ magnétique, nous utilisons les équations (II)

(de Faraday), qui nous donnent

$$
(\mathrm{XXIV})\quad \left\{
\begin{aligned}
M_1 &= \quad a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}F_e\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}F_0\right)\right],\\
M_2 &= -a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}F_e\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}F_0\right)\right],\\
M_3 &= \quad a\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{y}{x^2+y^2}F_0\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Remarque. — On reconnaît sans difficulté, comme pour le champ électrique, qu'il n'y a aucune singularité sur l'axe Oz, et que l'on retrouve la forme (8) du n° 5, correspondant à un élément de courant constant, au voisinage immédiat de l'origine.

14. *Champ électromagnétique d'un doublet électrique quelconque.* — Récapitulons les formules obtenues pour les différents doublets, en indiquant leur direction par des indices supérieurs x, y, z.

Posons, pour abréger,

$$
X = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2};
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
E_1^x &= \quad a^2\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{F_e}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(XF'_e)\right]+a^2\frac{\partial}{\partial y}(YF'_0),\\
E_2^x &= \quad a^2\left[-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{F_e}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(XF'_e)\right]-a^2\frac{\partial}{\partial x}(YF'_0),\\
E_3^x &= -a^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{F_e}{R}\right);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
E_1^y &= \quad a^2\left[-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{F_e}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(YF'_e)\right]-a^2\frac{\partial}{\partial y}(XF'_0),\\
E_2^y &= \quad a^2\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{F_e}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(YF'_e)\right]+a^2\frac{\partial}{\partial x}(XF'_0),\\
E_3^y &= -a^2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{F_e}{R}\right);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
E_1^z &= -a^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{F_e}{R}\right),\\
E_2^z &= -a^2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{F_e}{R}\right),\\
E_3^z &= -a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{F_e}{R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{F_e}{R}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Champ magnétique :

$$\left\{\begin{aligned}
M_1^x &= \quad a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}(XF_e) - \frac{\partial}{\partial x}(YF_0)\right],\\
M_2^x &= -a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(XF_e) + \frac{\partial}{\partial y}(YF_0)\right],\\
M_3^x &= -a\frac{\partial^2}{\partial z^2}(YF_0) + \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(YF_0);\\
M_1^y &= \quad a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}(YF_e) + \frac{\partial}{\partial x}(XF_0)\right],\\
M_2^y &= \quad a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(YF_e) - \frac{\partial}{\partial y}(XF_0)\right],\\
M_3^y &= \quad a\frac{\partial^2}{\partial z^2}(XF_0) - \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(XF_0);\\
M_1^z &= \quad a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F'_e}{R}\right),\\
M_2^z &= -a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F'_e}{R}\right),\\
M_3^z &= 0.
\end{aligned}\right.$$

On formera facilement les composantes d'un doublet de moment $F(-at)$ et de direction fixe α, β, γ; pour E_1 par exemple on doit prendre

$$\alpha E_1^x + \beta E_2^y + \gamma E_3^z.$$

Si la direction du doublet change constamment, on attribuera à chacune des trois composantes du doublet la loi de variation $F^x(-at)$, $F^y(-at)$, $F^z(-at)$ convenable, et l'on obtiendra chaque composante du champ par addition des composantes de même direction relatives aux trois doublets élémentaires.

15. *Doublets électromagnétiques.* — Il est maintenant très facile d'écrire les formules qui donnent le champ produit par un petit circuit fermé d'orientation quelconque placé à l'origine.

Soient l^ξ, l^η, les longueurs très petites des doublets parallèles à deux directions rectangulaires quelconques, ξ, η.

Désignons les moments des doublets électriques par

$$F^\xi(-at) = l^\xi f(-at),$$
$$F^\eta(-at) = l^\eta f(-at);$$

$\pm f(-at)$ représente la charge électrique de chaque pôle des

doublets; le courant a, dans chacun d'eux, la même intensité

$$I = \frac{\partial}{\partial t} f(-at) = -af'(-at),$$

l'accent indiquant une dérivation par rapport à toute la variable $(-at)$. Nous constituons un circuit fermé rectangulaire, d'intensité uniforme I, et sans aucune charge, en associant deux doublets ξ de sens contraire à la distance l^η, avec deux doublets η à la distance l^ξ, tels que le courant circule dans le même sens sur tout le contour.

Si les axes ξ, η, et ζ normal aux deux autres, ont la même disposition que les axes x, y, z, nous avons un circuit de moment magnétique positif

$$I l^\xi l^\eta = \mu(-at)$$

en prenant successivement :

Le doublet ξ positif à l'origine o, o :
Le doublet η positif au point $+l^\xi$, o :
Le doublet ξ négatif au point o, l^η;
Le doublet η négatif à l'origine o, o.

Une quelconque P des composantes du champ en un point x, y, z s'obtient en prenant

$$P = l^\eta \frac{\partial}{\partial \eta}(l^\xi P^\xi) - l^\xi \frac{\partial}{\partial \xi}(l^\eta P^\eta),$$

en appelant P^ξ, P^η les composantes correspondantes relatives à un doublet de longueur unité soit suivant l'axe ξ, soit suivant l'axe η; mettons en évidence les dérivées par rapport aux coordonnées courantes, nous aurons

$$P = -l^\eta l^\xi \left[\frac{\partial}{\partial y}(P^\xi) - \frac{\partial}{\partial x}(P^\eta)\right].$$

16. *Doublet magnétique axial.* — Soit $\mu(-at)$ le moment magnétique variable de ce doublet; l'application de la règle précédente donne, en conservant les mêmes notations qu'au n° 14 :

$$E_1 = -a\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y\mu_0) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(X\mu_0) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Y\mu_0) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(X\mu_0)\right],$$

$$E_2 = -a\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(Y\mu_0) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(X\mu_0) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(Y\mu_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X\mu_0)\right],$$

$$E_3 = 0,$$

et pour le champ magnétique :

$$M_1 = +\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(Y\,\mathfrak{M}_e) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(X\,\mathfrak{M}_e) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(Y\,\mathfrak{M}_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X\,\mathfrak{M}_0)\right],$$

$$M_2 = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y\,\mathfrak{M}_e) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(X\,\mathfrak{M}_e) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Y\,\mathfrak{M}_0) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(X\,\mathfrak{M}_0)\right],$$

$$M_3 = \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}(X\,\mathfrak{M}_0) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\,\mathfrak{M}_0)\right].$$

On a posé

$$\mu(-at) = \mathfrak{M}'(-at).$$

17. *Doublet magnétique équatorial.* — On obtient de même, quand le circuit situé dans le plan yz a son axe dirigé suivant Ox :

$$E_1 = a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Y\,\mu_e) - \frac{\partial}{\partial y}(X\,\mu_0)\right],$$

$$E_2 = a\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}(Y\,\mu_e) + \frac{\partial}{\partial x}(X\,\mu_0)\right],$$

$$E_3 = a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu'_e}{R}\right),$$

et pour le champ magnétique :

$$M_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(Y\,\mathfrak{M}_e) + \frac{\partial}{\partial x}(X\,\mathfrak{M}_0)\right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\mu_e}{R}\right),$$

$$M_2 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Y\,\mathfrak{M}_e) - \frac{\partial}{\partial y}(X\,\mathfrak{M}_0)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\mu_e}{R}\right),$$

$$M_3 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}(X\,\mathfrak{M}_0).$$

18. Toutes ces formules ne diffèrent pas, *au fond*, de celles que l'on peut tirer du travail important de Grünwald, paru en 1902 dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de *Vienne*, ou de celles équivalentes obtenues par Signorini, et dont un court résumé a paru dans les *Lincei* en 1906 (¹); mais elles en diffèrent beaucoup par l'apparence et l'interprétation qui en résulte.

(¹) Le Mémoire de Grünwald (p. 411 à p. 485) contient deux parties : la première relative aux milieux uniaxes possédant en outre une compressibilité cubique isotrope finie; la seconde relative aux milieux électromagnétiques uniaxes. Il donne des intégrales triples qui définissent l'état d'un milieu infini

Ces deux auteurs ont conservé dans la partie de leurs formules qu'on doit comparer aux nôtres un signe de quadrature inutile;

---

en fonction de l'état initial et des sources. Les termes d'apparence infinie sur l'axe optique sont introduits par l'intégration et figurent comme soi-disant intégrales résiduelles. Un Mémoire est annoncé sur les oscillations de Hertz (doublets) et un autre sur le principe d'Huygens dans les uniaxes; je n'ai pu découvrir s'ils ont été publiés.

Il me reste à parler de quelques Mémoires dont je n'ai pu prendre connaissance que pendant la correction de ces épreuves grâce à l'ouverture de la Bibliothèque universitaire (1er novembre).

Le Mémoire complet de M. Signorini (131 pages) a paru dans les *Annales de l'École normale de Pise*. Les titres des chapitres donneront une idée du plan de cet important travail : I. Intégrales de Lamé (plus exactement de Volterra). II. Formules de S. Kowalesky. III. Extension de la formule de Poisson. IV. Extension de la formule de Kirchhoff; possibilité analytique d'un *point* lumineux unique. V. Principe d'Huygens. VI. Règle (construction) d'Huygens. Ce Mémoire abonde comme le précédent en développements mathématiques qui laissent difficilement pressentir la simplicité du phénomène principal. C'est toujours de source ponctuelle qu'il est question et non de doublets; les formules donnent toujours l'illusion d'une intégrale résiduelle.

Il en était de même dans le Mémoire antérieur de M. Conway (*Proc. Lond. Math. Soc.*, t. XXXV, 1902) sur la propagation de la lumière dans les milieux uniaxes. M. Conway débute en *posant* que la fonction

$$\chi = \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} a\,\frac{d\lambda}{\lambda}\left[\mathrm{F}\left(t+\sqrt{\frac{\lambda^2+z^2}{a^2}}\right)-\mathrm{F}\left(t+\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}}\right)\right.$$
$$\left.+f\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+z^2}{a^2}}-t\right)-f\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}}-t\right)\right]$$

satisfait aux équations aux dérivées partielles et aux conditions de continuité nécessaires pour définir les sources dans les uniaxes. Il écrit les champs électrique et magnétique des deux espèces de doublets, tant électriques que magnétiques, diversement orientés, à l'aide des dérivées de la fonction χ, sans développer celles ci : en sorte que la solution paraît dépendre d'une fonction de structure compliquée. Le Mémoire, bref et élégant, mérite d'être lu.

Ce sont toujours les Leçons 22 et 23 de la théorie de l'Élasticité de Lamé (1862), dont on retrouve les résultats, pour les biaxes, avec les impossibilités si bien mises en évidence par M. Volterra, quand on suppose la source strictement ponctuelle, et qui ne s'adaptent aux doublets, dans le cas des uniaxes, que d'une manière très artificielle. J'espère revenir d'ici peu sur cette question en discutant la propagation dans les biaxes.

Le Mémoire de Brill (*Math. Ann.*, t. I, 1869) contient quelques transformations mathématiques des équations de propagation; il retrouve les solutions de Lamé, et pour le cas des uniaxes leur donne une forme nouvelle, où figurent des intégrales avec lesquelles la fonction de χ de Conway présente une certaine analogie.

Paris, 10 novembre 1917.

tous deux disent explicitement et répètent que ce signe indique l'existence d'une *onde intermédiaire*, s'étendant entre les deux ondes ordinaire et extraordinaire.

Les formules du Mémoire actuel montrent qu'il s'agit d'une illusion d'écriture provenant d'un raisonnement inachevé.

Pour plus de clarté, il faudrait que les mathématiciens et les physiciens s'entendent sur ce qu'ils appelleront une *onde intermédiaire* ou *résiduelle;* ce mot joue dans les généralités sur les équations aux dérivées partielles un rôle d'autant plus encombrant qu'il est moins défini.

Le sens strict serait le suivant : Pour qu'il n'y ait pas d'onde résiduelle il faut et suffit que l'état en un point de coordonnées x, y, z par rapport à la source ponctuelle, soit entièrement défini par l'état de la source à *une* époque antérieure $\tau(x, y, z)$. Dans un milieu isotrope, la distance r suffit; dans un milieu homogène où la vitesse de propagation ne dépend que de la direction, τ est de la forme $r\tau_1\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$.

Mais le cas particulier des milieux isotropes montre qu'il faut en outre préciser les variables qui servent à définir l'état.

La proposition ne s'applique strictement qu'aux états définis par une propriété scalaire simple du milieu, le potentiel des vitesses, la pression, l'excès absolu ou relatif de densité, qui ont la forme

$$\varphi = \frac{f(r - at)}{r}.$$

Mais s'il s'agit de la vitesse, ou de l'accélération, ou de toute autre propriété qui s'obtient en prenant des dérivées spatiales du potentiel, tout se complique :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -x\frac{f(r - at)}{r^3} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}f(r - at).$$

D'une part, la fonction et sa dérivée par rapport à r interviennent toutes deux; d'autre part, il n'y a pas de vitesse déterminée à l'origine. Il n'y a donc pas de comparaison directe à établir entre une propriété employée à décrire l'état du milieu, mais qui n'a aucune

signification définie à la source, et une *différente* qui seule est définie à la source.

Le phénomène correspondant à l'existence de la fonction $f(r - at)$ et d'une ou plusieurs de ses dérivées, multipliées par des fonctions différentes des coordonnées, est décrit par les physiciens sous le nom de « changement de phase rapide au voisinage de la source » dans le cas des sources périodiques; on peut sans inconvénient conserver la même dénomination dans le cas général en attribuant au mot *phase* son sens étymologique général, au lieu du sens restreint. On ne songera pas un instant à dire qu'il y a une onde résiduelle pour la vitesse, alors qu'il n'y en a pas pour le potentiel.

19. *A mon avis, il ne faut employer la dénomination d'onde résiduelle, ou d'onde intermédiaire que pour caratériser une propriété du milieu, et employer les mots changements de phase, ou analogues, pour les complications plus ou moins grandes que peuvent présenter les variables choisies pour définir l'état du milieu.*

Toutes les fois qu'on peut trouver *une fonction sans résidu, dont toutes les autres se déduisent par des opérations algébriques ou des dérivations, il convient de dire que la propagation se fait sans résidu dans le milieu étudié.*

La propagation sans résidu est caractérisée par l'existence d'une intégrale

$$\Phi = A(x, y, z)\mathfrak{F}[t - \tau(x, y, z)],$$

où A et τ sont deux fonctions bien définies de x, y, z; mais où $\mathfrak{F}$ reste une fonction arbitraire. A l'origine, τ est nulle comme r et A infinie comme $\frac{1}{r}$.

Les deux fonctions A, τ peuvent dépendre de la position $x_0 y_0 z_0$ du point source, et être en général de la forme $A(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$, $\tau(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ si le milieu n'est pas homogène. La variable sur laquelle porte la fonction arbitraire pourrait même être une fonction non linéaire en t, $f(t, x, y, z)$ *entièrement déterminée par le milieu*, sans ambiguïté.

Si l'on adopte cette définition, *les milieux uniaxes n'ont pas de résidu* (n° 8), bien que la force électrique et la force magnétique éprouvent, au voisinage de la source, des variations progressives de phase plus compliquées que dans les milieux isotropes.

Saint-Cast, 20 septembre 1917.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR L'AN 1918. 1 vol. in-16 (16-9) de x-870 pages, avec 33 figures, 5 cartes célestes, 3 cartes magnétiques et 1 portrait. — Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1918. Prix (net) : 2 fr.

Table des principaux chapitres.

Calendrier pour l'an 1918. Prédictions. Études des divers calendriers. — Terre. — Astronomie. — Poids et mesures. Monnaies. Heures légales. — Données physiques et chimiques. — Supplément pour l'an 1919 (Calendrier).

Notices scientifiques.

Le calendrier égyptien; par M. G. BIGOURDAN. — *L'heure en mer*, par M. J. RENAUD. — *Le Soleil et le magnétisme terrestre;* par M. HAMY. — *La vie et l'œuvre de Gaston Darboux;* par M. E. PICARD.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MAC MAHON (MAJOR PERCY A.). — COMBINATORY ANALYSIS. [Analyse combinatoire.] Vol. II. 1 vol. in-8 jésus, XIX-340 pages. Cambridge, at the University Press, 1916.

L'analyse du *premier volume* de cet Ouvrage a été donnée au Tome XXXIX, page 237, de ce *Bulletin*, et je prierai le lecteur de s'y reporter pour les définitions de certains des termes qui vont être employés.

Le *second volume* traite surtout de la partition des nombres par le moyen des fonctions génératrices, le point de départ étant celui d'Euler : *le nombre des partitions d'un entier n est le coefficient de x^n dans le développement, suivant les puissances de x, de* $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots}$. Il y est fait un très grand usage de la représentation graphique suivante : soit la partition $4+4+3+1$ de l'entier 11, les parties étant rangées par ordre de grandeurs non croissantes; on la représente par

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \end{array}$$

La Section VII renferme un compte rendu détaillé des recherches relatives au résultat d'Euler ou à des résultats analogues. Ce sont, principalement, des transformations de produits infinis en séries. L'Auteur montre comment on peut souvent les obtenir au moyen de la représentation graphique signalée plus haut; par exemple, il établit ainsi l'identité

$$(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\ldots$$
$$=1+a\frac{x^2}{1-x^2}+a^2\frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}+a^3\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\ldots.$$

Parmi les résultats de ce genre, on peut remarquer les identités

de M. Ramanujan, dont nous citerons seulement la première :

$$1 + \frac{x}{1-x} + \ldots + \frac{x^{i^2}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^i)} + \ldots$$
$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^6)\ldots(1-x^{5m+1})\ldots} \quad \frac{1}{(1-x^4)(1-x^9)\ldots(1-x^{5m+4})\ldots}.$$

Elle se traduit, dans la théorie des partitions, par ce théorème : *Le nombre des partitions d'un entier, dans lesquelles toutes les parties sont des multiples de* 5 *plus ou moins* 1, *est égal au nombre des partitions de ce même entier dans lesquelles deux parties quelconques diffèrent de plus de* 1.

Malgré la simplicité de leurs énoncés, ces théorèmes ne sont pas encore démontrés, on les a seulement vérifiés; par exemple, dans l'identité citée plus haut, on a vérifié l'égalité des coefficients de x dans les deux membres jusqu'au terme en x^{89}. Suivant une habitude assez commune chez les mathématiciens anglais, M. Mac Mahon tire néanmoins de ces théorèmes toutes les conséquences qu'ils comportent.

Suivent les rapports entre la théorie des partitions et d'autres théories d'analyse combinatoire, celle de la *composition* des entiers et des systèmes d'entiers, celle des permutations dans lesquelles il n'y a que deux espèces d'objets.

La Section VIII a pour but de fonder la théorie des partitions sur celle des égalités et inégalités diophantiennes. Comme on peut supposer que les parties qui composent un entier n sont rangées par ordre de grandeur, la recherche des partitions de n est ramenée à la solution du système diophantien :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i = n,$$
$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_i > 0.$$

De ce point de vue, le problème peut se généraliser beaucoup en remplaçant le système précédent par un système d'égalités ou d'inégalités diophantiennes quelconques. A ce sujet, il y a un théorème de M. Hilbert qui dit que les solutions d'un tel système sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients positifs d'un certain nombre d'entre elles formant ce qu'on appelle un *système fondamental*. M. Mac Mahon, par le moyen des fonctions génératrices, retrouve ce résultat et donne une méthode pour

calculer le système fondamental. Comme application, il traite les questions suivantes : *Quels doivent être les exposants positifs* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ *pour que l'expression*

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^{\alpha_1} \times \left(\frac{1-x^{n+2}}{1-x^2}\right)^{\alpha_2} \times \ldots \times \left(\frac{1-x^{n+s}}{1-x^s}\right)^{\alpha}$$

soit un polynome entier, quel que soit n, ou pour que *le nombre*

$$\left(\frac{n+1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{n+s}{s}\right)^{\alpha_s}$$

soit un nombre entier quel que soit n. Toutes ces questions se ramènent en effet à des inégalités entre les exposants entiers α.

Les partitions dont il a été parlé jusqu'à maintenant sont des partitions à une dimension, c'est-à-dire dont les éléments peuvent être placés sur une ligne

$$11 = 4 + 4 + 3 + 1;$$

et elles sont susceptibles d'une représentation à deux dimensions

$$\begin{array}{llll} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \end{array}$$

Les Sections IX et X sont consacrées à une généralisation, les partitions étant à deux dimensions et susceptibles d'une représentation graphique à trois. Une partition à deux dimensions d'un entier positif n est une décomposition de cet entier positif en une somme d'autres placés sur des lignes et des colonnes ; par exemple,

$$\begin{aligned} 21 = \quad & 5 + 4 + 2, \\ & + 3 + 3 + 1, \\ & + 2 + 1. \end{aligned}$$

La représentation graphique à trois dimensions consiste à remplacer chaque nombre du tableau précédent par une file, perpendiculaire au plan de la figure, d'un nombre égal de points.

Ces permutations donnent naissance à des questions qui sont des généralisations de celles dont on a parlé plus haut. M. Mac Mahon en a cherché la solution durant de longues années : il l'a

tirée enfin de la considération des « lattice functions » (fonctions treillis) formées au moyen des « lattice permutations ». Les « lattice permutations » se définissent de la façon suivante : soient p lettres α, q lettres β, ...; on suppose $p \geqq q \geqq \ldots$. Une permutation des lettres α, β, ... est une « lattice permutation » lorsque, la coupant à une place quelconque et supposant qu'à gauche de la coupure il y ait p' lettres α, q' lettres β, ..., on a $p' \geqq q' \geqq \ldots$ quelle que soit la coupure. Chaque permutation a un indice r qu'il serait un peu long de définir ici, et la « lattice function » c'est la somme Σx^r, étendue à toutes les « lattice permutations ». Cette fonction se transforme en produit. Enfin, l'Auteur aborde la question des permutations à trois dimensions.

La Section XI contient une autre espèce de généralisation des résultats précédents, celle que l'on obtient en remplaçant les entiers ordinaires par des entiers complexes, c'est-à-dire par des systèmes de k entiers. L'Auteur se borne d'ailleurs au cas de $k = 2$. Cette théorie difficile semble devoir être d'un grand usage dans les recherches futures sur l'Analyse combinatoire; elle est ici appliquée à une seconde solution, brève et élégante, de la question des carrés latins déjà traitée dans le premier volume.

Le second volume se termine par des tables de fonctions symétriques de deux systèmes de quantités et par un index alphabétique se rapportant aux deux volumes.

Nous ne reviendrons pas sur les qualités de l'Ouvrage; nous les avons signalées dans notre analyse du premier volume. Nous avons attendu jusqu'ici pour lui faire un petit reproche; il ne contient pas assez d'indications bibliographiques. Pour les identités de Ramanujan, par exemple, ou pour le résultat d'Hilbert signalé plus haut, aucune indication n'est donnée au lecteur de l'endroit où ont paru ces importants résultats.

A part cela, il n'y a que des éloges à adresser au Livre de M. Mac Mahon. C'est actuellement le guide indispensable pour ceux qui voudront s'engager dans les recherches difficiles et un peu spéciales, mais peut-être appelées à un grand avenir et, en tout cas, très intéressantes de l'Analyse combinatoire.

E. Cahen.

MÉLANGES.

SUR LA DÉMONSTRATION DIRECTE DU DERNIER THÉORÈME DE HENRI POINCARÉ PAR M. DANTZIG;

PAR M. G.-D. BIRKHOFF.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (février 1917), M. Dantzig a essayé une démonstration directe et élémentaire du théorème de Poincaré.

J'avais eu avec M. Dantzig une correspondance au sujet de sa démonstration. Dans le mois de juin 1916, il m'a envoyé son premier essai. Cela était presque le même que celui qu'il a donné dans le *Bulletin*, sauf qu'il ne considérait pas alors la possibilité que la courbe L de déviation angulaire nulle puisse être rencontrée en plusieurs points par un rayon.

Dans ma réponse à M. Dantzig, j'ai cherché à lui montrer qu'il n'avait considéré que le cas le plus simple pour la forme de L. Aussi, comme je lui avais indiqué, mon ami et collègue M. E.-B. Wilson m'a communiqué la même démonstration, il y a quelques ans. Je reproduis ici (avec la permission de M. Wilson) quelques lignes d'une lettre qu'il m'a écrite dans le mois de novembre 1912 :

« Won't you bother with finding out what ridiculous error there is in this simple thing that occurred to me yesterday? »

« Let

$$r' = f(r, \varphi), \qquad \varphi' = g(r, \varphi)$$

be the transformation (r, φ coordonnées polaires) with the conditions

$$r_1 = f(r_1, \varphi), \qquad r_0 = f(r_0, \varphi),$$
$$\varphi' = g(r_1, \varphi) > \varphi, \qquad \varphi' = g(r_0, \varphi) < \varphi.$$

We build over the ring the surface $z = \varphi' - \varphi = g(r, \varphi) - \varphi$ so as to transfer the wide variations in φ to the vertical where they don't look so mussy. Now the surface is attached to the inner ring

$r = r_0$ *below* the plane $z = 0$, to the outer ring $r = r_1$ *above* that plane, and is everywhere continuous. Consider any continuous curve

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1, \qquad r(t_0) = r_0, \qquad r(t_1) = r_1$$

going from any point of the inner ring to any point of the outer, and consider further $z(t) = g[r(t), \varphi(t)] - \varphi(t)$, the curve on the surface cut out by a cylinder on the curve in the plane. We have $z(t_0) < 0$, $z(t_1) > 0$ and $z(t)$ continuous. Hence there is *one* point at least on this curve at which $\varphi' - \varphi = 0$, i. e. where the motion is inward or outward along the radius from the point to the transformed point. Now the intersection of

$$z = \varphi' - \varphi = g(r, \varphi) - \varphi$$

with $z = 0$ may be of great complexity containing ovals or ovals within ovals in the ring. But as this intersection has to contain all of its own limit points and cannot be traversed by *any* continuous curve from the inner to the outer circle without being cut in at least one point, the intersection must include at least one continuous curve circling around the ring, perhaps imbedded in a continuous region of intersection for aught I care. Now upon this curve (c'est presque la courbe L de M. Dantzig) the shift $r' - r$ is continuous and could not be always positive or always negative without shrinking said curve or expanding it, contrary to the supposed invariance of areas or integrals. Hence there must be at least two points for which $r' = r$ as well as $\varphi' = \varphi$. »

On voit que la démonstration de M. Dantzig ne diffère de celle de M. Wilson que tout à la fin (*loc. cit.*, p. 57-58).

Ensuite M. Dantzig a cherché à me convaincre qu'il existait toujours une courbe L ne rencontrant aucun rayon en plus d'un point. Dans une seconde lettre j'ai construit presque la figure de la page 57 de son article. Il a admis alors la possibilité que je lui avais indiquée.

M. Dantzig n'est allé maintenant qu'un pas plus loin. Il a considéré le cas suivant : 1° L est rencontré par tout rayon trois fois au plus; 2° il n'existe pas d'autres branches de la courbe de déviation nulle.

Je conclus que M. Dantzig n'a appliqué sa méthode que dans un cas extrêmement spécial.

Au fond cette méthode est très voisine de celle de Poincaré, qui considérait les courbes L′ de variation *radiale* nulle. Poincaré a trouvé que sa méthode suffisait pour toutes les courbes L′ qu'il avait imaginées. M. Dantzig n'a considéré que deux possibilités des plus simples. Il me semble tout à fait probable que Poincaré ait considéré aussi les courbes L.

En conclusion, je veux dire qu'il n'est pas impossible qu'on puisse arriver au but par la considération ou bien des courbes L′ ou bien des courbes L. Mais l'essai de M. Dantzig me semble avoir laissé à côté toutes les vraies difficultés. Et M. Wilson est aussi du même avis.

QUELQUES RÉCENTS PROGRÈS DES THÉORIES HYDRODYNAMIQUES ;

Par M. Henri VILLAT.

Dans ces dix dernières années, sous l'impulsion surtout des travaux de MM. T. Levi-Cività et M. Brillouin, la théorie des mouvements discontinus des fluides et plusieurs autres connexes, ont réalisé de notables progrès en des points essentiels. Dans ce qui suit, nous avons cherché à montrer l'état actuel de ces questions, en exposant, aussi brièvement que possible, tous les résultats récemment acquis, et signalant au passage ceux qui restent à compléter. Est-il besoin de dire que nous nous sommes peu astreints à suivre l'ordre chronologique des Mémoires cités [1].

Le but principal que l'on s'est proposé dans toutes ces questions est d'obtenir, au moyen des fluides parfaits, une explication approchée des phénomènes que l'expérience nous fait connaître

[1] On pourra consulter à ce sujet : *Développements concernant l'hydrodynamique*, par A. Love, P. Appell, H. Béghin et H. Villat. (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*. Gauthier-Villars, 1914); et U. Cisotti, *Su alcune recenti ricerche di Idrodinamica* (*Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze*, 1912).

dans les fluides naturels. Cette ambition n'a rien que de légitime. « Autant que je le puisse voir, écrivait naguère justement un grand physicien, il n'existe réellement aucune raison pour ne pas considérer les équations de l'Hydrodynamique comme les expressions exactes des lois qui dans la réalité régissent les mouvements des fluides. »

Le groupe des faits expérimentaux, qui a le plus longtemps déconcerté les efforts des mathématiciens, est celui qui se rattache à la résistance qu'oppose un fluide à l'avancement d'un solide entièrement baigné par celui-ci. En théorie comme en pratique, il a convenu de considérer tout d'abord le cas du mouvement permanent, obtenu lorsque le mouvement du fluide est devenu stationnaire par rapport au solide. C'est aussi le cas où l'interprétation des phénomènes est le plus aisée : grâce au principe du mouvement relatif, il revient au même de considérer un courant fluide qui rencontre un solide fixe, ou un solide mobile dans un fluide d'abord au repos. Dans le cas au contraire d'un mouvement non uniforme, par exemple pour une translation de vitesse $U(t)$ et en faisant certaines hypothèses sur la continuité des vitesses internes, on peut montrer que la différence des pressions totales, supportées par le solide considéré comme mobile ou au repos, est égale à $M\frac{dU}{dt}$, si M représente la masse du fluide déplacé; la résistance du solide mobile est inférieure à la pression totale exercée sur le solide fixe, si $\frac{dU}{dt}$ est positif, supérieure dans le cas contraire (V. Valcovici, *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914, p. 683).

Considérons donc un mouvement permanent. Supposons-le sans rotations. Si nous supposons le solide baigné par le fluide de telle sorte qu'il y ait mouvement relatif (tangentiellement, bien entendu, à la paroi) en tous les points de la surface, les difficultés se présentent dès le début : en des régions étendues, on trouve des pressions négatives, voire même infiniment grandes négatives; de plus, si l'on calcule la résistance éprouvée par le solide, on trouve qu'elle est nulle quelle que soit la forme du solide. Ce fait, qui constitue le paradoxe de d'Alembert, a été établi et étudié dans toute sa généralité par U. Cisotti (*Atti R. Ist. Veneto*, 1903-1904, p. 423; 1905-1906, p. 1291) pour le cas d'une translation uniforme dans un fluide indéfini, et étendu par le même auteur au cas où la

translation du solide a lieu dans un tube cylindrique de section quelconque (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXVIII, 1909, p. 307). Dans le cas d'un mouvement hélicoïdal uniforme, la résistance directe (dans le sens de l'axe hélicoïdal) est encore nulle (*Atti R. Ist. Veneto*, 1909-1910, p. 427; 1911-1912, p. 167): les pressions à la surface, pour un solide sphérique par exemple, seraient équivalentes à une force unique tendant à éloigner la sphère de l'axe du mouvement hélicoïdal. Signalons ici une étude de T. Boggio (*Atti R. Ist. Veneto*, t. LXIX, 1910, p. 889) qui simplifie beaucoup l'exposé en utilisant le calcul vectoriel, et les recherches d'Almansi [*Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso* (*R. Acc. dei Lincei*, t. XVIII, p. 587; t. XIX, p. 57, 116, 244, 437)].

Pour échapper à des conséquences évidemment contradictoires avec l'expérience la plus courante, il est nécessaire de supposer dans le fluide la présence de surfaces de discontinuité : à l'arrière du corps il se forme une région de fluide mort, immobile par rapport à ce corps. Au reste l'observation, même superficielle, montre que dans la réalité de telles surfaces ont une existence effective (qui n'en a fait l'expérience, en wagon ou derrière le coupe-vent d'une automobile?). L'hypothèse introduite répond donc à la matérialité des faits. Kirchhoff et Helmholtz ont les premiers introduit ces surfaces dans les calculs. Dans les exemples qu'ils ont donnés, ces surfaces s'étendent jusqu'à l'infini; cette extension à l'infini s'est retrouvée dans toutes les applications ultérieures. Elle est inévitable comme il résulte d'une importante proposition due à M. Brillouin [*Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la résistance des fluides* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XXIII, 1911, p. 145)]. Ce théorème, que P. Duhem a proposé d'appeler *le paradoxe de M. Brillouin*, s'énonce ainsi : « Imaginons qu'un solide se meuve uniformément au sein d'un fluide indéfini, en régime permanent : supposons en outre que la pression s'annule à l'infini; si le fluide n'est pas le siège de surfaces de discontinuité infiniment étendues, il y a au sein du fluide des points où la pression est négative. » M. Brillouin a établi cette proposition en supposant le mouvement à deux dimensions. P. Duhem l'a étendu au mouvement à trois dimensions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 159, 1914, p. 790). Par ailleurs, P. Duhem a fait

voir que le paradoxe de d'Alembert subsisterait même avec des surfaces de discontinuité à l'arrière du corps, si ces surfaces ne s'étendaient pas à l'infini, tout au moins si l'on admet que les vitesses s'annulent partout à l'infini, et tendent vers zéro suffisamment vite [P. Duhem, *Sur le paradoxe hydrodynamique de d'Alembert* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 159, 1914, p. 592); E. Picard, *A propos du paradoxe de d'Alembert* (*Ibid.*, p. 638); P. Duhem, *Remarque sur le paradoxe....* (*Ibid.*, p. 638); H. Villat, *Sur le paradoxe de d'Alembert et la théorie des mouvements discontinus* (*Ibid.*, p. 800)]. J'ai d'autre part démontré incidemment (H. Villat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915, p. 376-404) que même dans un fluide non illimité dans tous les sens (par exemple dans un canal) les surfaces de discontinuité à l'arrière des obstacles doivent s'étendre indéfiniment.

Cette hypothèse des discontinuités, *la seule* qui permette d'échapper à des paradoxes inadmissibles, n'a pas trouvé droit de cité aussi facilement qu'on pourrait l'imaginer. Sir W. Thomson (lord Kelvin) a apporté diverses objections (*Nature*, London, t. 50, 1894, p. 524, 549, 573, 597; *Papers*, Cambridge, t. IV, 1910, p. 215). La principale est que le mouvement discontinu lui paraît en contradiction avec le principe de l'énergie cinétique minimum. Cette objection a été récemment réfutée par M. Brillouin (*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XXII, 1911, p. 433), des recherches duquel il résulte que dans le mouvement discontinu l'énergie cinétique est moindre que dans le mouvement continu pour le même obstacle. De plus, il y a minimum pour l'excès de l'énergie cinétique du liquide en mouvement permanent discontinu, sur l'énergie cinétique que possédait dans le mouvement uniforme sans obstacle le volume qu'occupe le fluide en mouvement discontinu (en excluant le volume de l'obstacle et le volume du fluide stagnant à l'arrière).

Par des considérations tirées surtout du saut d'accélération, J. Hadamard (*C. R. Acad. Sc.*, t. 136, 1903, p. 299, 545; *Leçons sur la propagation des ondes*, 1903, p. 355) a fait voir que, si rien ne s'oppose à la présence de surfaces de discontinuité dans un fluide, de telles surfaces ne sauraient naître dans un fluide parfait. M. Brillouin (*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XXIII, 1911,

p. 146) montre que la difficulté n'est qu'apparente, et décrit la naissance des surfaces en question, d'une façon qui semble ne donner prise à aucune objection mathématique.

Si d'ailleurs la théorie des discontinuités ne donne qu'une approximation des phénomènes réels (en particulier la région de fluide mort à l'arrière, se ferme en pratique nécessairement à distance finie sous l'influence de la viscosité, ce qui modifie sensiblement le caractère du mouvement dans la région arrière), il n'en est pas moins vrai que cette théorie donne, tant qu'on ne rejette pas les équations de l'Hydrodynamique et qu'on suppose l'absence de viscosité, la seule interprétation acceptable des phénomènes naturels, et qu'elle en rend un compte bien approché. Calculée d'après cette théorie, la résistance à l'avancement d'un corps immergé est bien proportionnelle au carré de la vitesse, ainsi que l'exige l'expérience (T. Levi-Civita, *Atti dei Lincei*, 1901, 2e semestre, p. 3). Et en somme on peut dire que la conception des discontinuités constitue une abstraction qui dégage l'essentiel dans un ordre de phénomènes assez complexes.

On a parlé encore du temps infini qui serait nécessaire à l'établissement d'un régime permanent avec sillage. Mais il n'y a pas là d'objection véritable, et la même observation ne peut-elle pas être faite à tout mouvement permanent d'un système à partir d'un état de repos initial? De sorte qu'en théorie ce temps infini n'a rien d'anormal, d'autant qu'en pratique il se réduit souvent à peu de chose. Un exemple tout à fait typique, bien que sans rapport immédiat avec le sujet que nous traitons, est le suivant, qui a peut-être déjà été remarqué : si l'on envisage le mouvement d'un parachute au moyen de l'équation différentielle classique, on constate que le mouvement tend à devenir uniforme au bout d'un temps théoriquement infini; or si l'on fait le calcul pour une surface et un poids normaux, on peut constater que le temps d'établissement du régime n'excède pas, pratiquement, quelques dixièmes de seconde. Cet exemple n'est évidemment pas isolé.

Nous ne terminerons pas ce paragraphe sans signaler une étude et une réfutation très nette des objections faites à la théorie du discontinu; on trouvera cette discussion dans F.-W. Lanchester (*Aérodynamique*, p. 157 et suiv., traduction de C. Benoît; Gauthier-Villars, 1914).

C'est, comme on sait, Helmholtz qui a obtenu la première solution exacte d'un problème avec discontinuités. Sa méthode a été développée par Kirchhoff (*Mechanik*, 3e édition, p. 290) qui put calculer quelques autres exemples. Mais il faut arriver aux recherches de T. Levi-Cività (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1907, p. 1) et de M. Brillouin (*loc. cit.*) pour voir la théorie se présenter sous une forme définitive, qui a permis de développer ensuite de si nombreuses et importantes conséquences. Voici en quelques mots le principe de la méthode.

Considérons d'abord le cas typique du mouvement d'un solide dans un fluide illimité dans tous les sens. On se borne aux mouvements à deux dimensions, c'est-à-dire qu'on traite du mouvement d'un cylindre indéfini dans une direction perpendiculaire à ses génératrices, et qu'on étudie seulement ce qui se passe dans un plan perpendiculaire au cylindre. Soit xOy le plan en question, les axes étant liés au solide : soient (u, v) la vitesse en chaque point du fluide (de densité un) relativement à ces axes, $(1, 0)$ la vitesse à l'infini en avant, φ et ψ le potentiel et la fonction de courant. Posons

$$z = x + iy,$$
$$f = \varphi + \psi,$$
$$w = u - iv = \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega} = e^{-i(\Theta + i\Gamma)}.$$

On reconnaît de suite que la vitesse en chaque point a pour grandeur $V = e^{\Gamma}$ et qu'elle fait avec Ox l'angle Θ. D'autre part, f est une fonction analytique de z régulière dans la région occupée par le fluide en mouvement; cette région correspond dans le plan f à une région facile à déterminer, et la correspondance est univoque. A son tour Ω est une fonction uniforme de f dans ce dernier domaine. Si l'on connaissait cette fonction, il est manifeste que l'équation

$$dz = e^{i\Omega}\, df$$

permettrait de déterminer le mouvement. Il est non moins clair que le domaine D du plan f peut être représenté, au moyen d'une représentation conforme, sur un nouveau domaine D_t d'un nouveau plan auxiliaire t. Le succès de la méthode dépend du choix de D_t, qu'on doit faire de telle manière que la détermination de

la fonction $\Omega(t)$ y soit possible. T. Levi-Cività a introduit un grand progrès, en imaginant de faire cette représentation sur l'aire d'un demi-cercle du plan t, de manière que les bords du sillage correspondent au diamètre horizontal qui délimite le demi-cercle. Il y parvient au moyen de l'équation

$$f = a^2\left[\cos s_0 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right]^2,$$

a est une constante, s_0 un angle fixe entre o et π, tel que le point e^{is_0} corresponde au point de bipartition à l'avant de l'obstacle. Ce choix permet à M. Levi-Cività de démontrer que la forme la plus générale de la fonction $\Omega(t)$ est, en supposant la paroi solide munie d'un seul point singulier, où les tangentes fassent avec Ox les angles $\delta \pm \alpha$,

$$\Omega(t) = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{i(t - e^{is_0})}{1 - te^{is_0}} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n + \ldots$$

avec les conditions

$$c_0 = \frac{2\alpha}{\pi}\left(s_0 - \frac{\pi}{2}\right), \qquad c_n \text{ réel},$$

$$c_0 + c_1\cos s_0 + c_2\cos 2s_0 + \ldots + c_n\cos ns_0 + \ldots = 0.$$

Tous les éléments géométriques du mouvement se déterminent ensuite facilement. Quant à la résistance éprouvée par l'obstacle, si l'on désigne par P_x et P_y ses deux composantes, un beau théorème de T. Levi-Cività en fournit la valeur

$$P_x + iP_y = \frac{\pi a^2}{4}\Omega'^2(0) + \frac{i\pi a^2}{2}\left[2\cos s_0\,\Omega'(0) - \frac{1}{2}\Omega''(0)\right].$$

Cette formule, qui en réalité en contient deux autres, a été retrouvée, au moyen d'ingénieuses considérations physiques, par M. Brillouin (*loc. cit.*, p. 190) qui a également calculé le moment résultant des pressions sur la surface du corps.

Le cas où tous les coefficients c_n sont nuls, fait retomber sur un problème particulier déjà étudié par Kirchhoff et généralisé par lord Rayleigh (*Papers*, t. I, Cambridge, 1899, p. 267). Pour $s_0 = \frac{\pi}{2}$, et $c_{2n} = 0$, la configuration du mouvement sera symétrique par rapport à Ox.

Malheureusement la série entière qui subsiste dans la solution ne permet pas de voir facilement le lien qui existe entre cette série, dont le choix achève de déterminer la question, et la forme de l'obstacle supposé donné. En désignant cette série par $\Theta_1 + iT_1$, T. Levi-Cività a montré que pour un solide donné d'avance, pour lequel la courbure serait représentée par $c(\Theta)$ en fonction de l'angle Θ de la tangente en chaque point avec une direction fixe, tout revenait à déterminer deux fonctions harmoniques Θ_1 et T_1 associées, satisfaisant (quand on pose $t = e^{is}$) à une équation intégro-différentielle de la forme

$$\frac{d\Theta_1}{ds} = \chi(s)c(\Theta_1)e^{T_1},$$

où $\chi(s)$ représente une fonction donnée.

Sous cette forme le problème ne semble pas praticable avec les moyens dont dispose l'analyse, et M. Brillouin, dans son Mémoire fondamental, en étudiant en détail le cas où la série se réduit à son terme du premier degré, a montré l'extrême complication de cette recherche, ainsi que les multiples difficultés qui s'y présentent.

J'ai levé dans ma Thèse (2e Partie, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, p. 203-311) la difficulté concernant la forme du solide, et j'ai démontré qu'en désignant par e^{is} un point de la circonférence de rayon un du plan t, et par $\Phi(s)$ la valeur de l'angle que fait avec Ox la tangente à la paroi dans le plan z au point correspondant, la fonction $\Omega(t)$ avait pour expression

$$\Omega(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(s)\,\frac{1-t^2}{1-2t\cos s+t^2}\,ds,$$

la fonction $\Phi(s)$ étant assujettie à la condition nécessaire

$$\int_0^{\pi} \Phi(s)\,ds = 0.$$

Comme, lorsque s varie de 0 à π, le point correspondant z décrit le bord de l'obstacle toujours dans le même sens (en laissant l'obstacle à gauche de la direction suivie), on voit que le sens de la variation de $\Phi(s)$ dépend de la forme de l'obstacle d'une façon tout à fait intime et évidente. De sorte que la solution construite

à l'aide de la fonction arbitraire $\Phi(s)$, qui remplace la série entière de T. Levi-Cività, peut être aisément choisie de façon à obtenir une forme d'obstacle déterminée à l'avance. La paroi de l'obstacle peut comporter du reste des points anguleux en nombre quelconque, à condition que leur présence soit compatible avec les hypothèses.

Ceci nous amène à parler des conditions que doit remplir une solution supposée construite, pour être acceptable. Des impossibilités se présentent en effet après coup, qui sont très malaisées à déceler *a priori*. Tout d'abord, pour la validité d'une configuration, il faut que les valeurs qu'on y trouve pour la pression p soient partout positives (ou plutôt jamais négatives). Cela entraîne, entre autres, que si la paroi comporte un point anguleux, ne coïncidant pas avec la proue, l'angle formé par le solide en ce point se présente en creux devant le courant. En second lieu, il faut qu'en revenant au plan z par la formule

$$dz = e^{i\Omega}\, df,$$

on obtienne un mouvement fluide dans un domaine d'un seul tenant, limité par des frontières qui ne se coupent pas, ni entre elles ni les unes les autres. M. Brillouin (*loc. cit.*, et *C. R. Acad. Sc.*, t. **151**, 1910, p. 931) a donné des exemples frappants de la manière dont ces singularités peuvent se présenter en quelque sorte à l'improviste.

Il est utile de savoir éviter ces difficultés, par un choix convenable de $\Omega(t)$. J'ai montré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. X, 1914, p. 231-290; *C. R. Acad. Sc.*, t. **157**, 1913, p. 700) en considérant tout d'abord des mouvements symétriques par rapport à Ox, que la première difficulté était éludée quand on se trouvait dans les cas suivants :

$$\Phi(s)\cos s = \text{fonction croissante de } s, \qquad \text{de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2},$$

ou bien

$$\Phi'(s)\sin s = \text{fonction croissante de } s,$$

ou bien

$$\Phi''(s)\cos s = \text{fonction croissante de } s \qquad \text{avec} \qquad \Phi'(+0) = 0,$$

ou bien

$$\Phi'''(s)\sin s = \text{fonction croissante de } s$$

avec

$$\Phi'(+0) = 0, \qquad \Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leqq 0, \qquad \ldots.$$

Ces théorèmes sont compatibles avec des formes d'obstacles quelconques. Tous les obstacles concaves vers le courant rentrent dans le premier de ces théorèmes. Pour les obstacles convexes, la même difficulté ne se présente pas si $\frac{\Phi'(s)}{\sin s}$ est croissant dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$. Quant à la deuxième difficulté, elle ne se présente jamais pour les obstacles concaves vers le courant. On a alors divers résultats tels que le suivant : si $\Phi(s) \leqq \Phi(+0)$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et si $\Phi'(s)\sin s$ est une fonction croissante, la seconde difficulté est éludée. Dans la catégorie la plus intéressante, celle des obstacles convexes, il y a, comme l'a indiqué M. Brillouin, deux cas possibles : ou bien l'obstacle est à bords tranchants, les lignes de sillage s'en détachent avec un rayon de courbure nul (ceci est le cas général) : ou bien l'obstacle est une véritable proue, dont les lignes de jet se détachent avec un rayon de courbure non nul, égal à celui de la paroi en ce point. J'ai fait voir que la condition d'existence d'une proue était

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(s)}{\sin s}\, ds - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0$$

et sous cette condition, la seconde difficulté signalée ne se présente pas (*loc. cit.*, p. 244 et 256). Des résultats analogues s'obtiennent pour les mouvements non symétriques.

Si le profil du solide étudié présente un angle sur sa surface antérieure, un nouveau genre de difficulté peut se présenter. Si l'angle forme un creux devant le courant, la solution précédente peut subsister. Mais s'il s'agit d'un angle vif, le problème apparaît tout d'abord comme impossible, sauf si le sommet de l'angle coïncide avec le point de bipartition à l'avant. Or, en prenant par exemple le cas typique d'un dièdre formé par deux lames de longueurs et d'inclinaisons données, on constate qu'en plaçant le point mort au sommet de l'angle, le rapport des longueurs des deux lames fournies par la solution est entièrement déterminé : de

sorte que pour un dièdre donné, avec deux lames de longueurs données, le problème n'est résolu que pour une orientation déterminée par rapport au courant. C'est à propos de la difficulté considérable résultant de cette circonstance, que M. Brillouin écrivait récemment : « Pour un solide constitué par exemple par un dièdre, la position même du problème est si difficile, qu'on peut se demander si le mouvement permanent de Helmholtz est toujours possible. » (*C. R. Acad. Sc.*, t. **153**, 1911, p. 43.)

On peut surmonter cette difficulté comme je l'ai indiqué (*C. R. Acad. Sc.*, t. **154**, 1912, p. 1693, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915, p. 375-404), en admettant que la présence de l'angle vif entraîne l'existence d'une région limitée de fluide mort à l'avant du corps, le long de la lame qui ne contient pas le point de bipartition. En partant de cette hypothèse, dont M. E. Picard a montré récemment l'utilité (*C. R. Acad. Sc.*, t. **159**, 1914, p. 638) et en utilisant une formule que j'ai obtenue dans une autre recherche (H. Villat, *Acta mathematica*, t. **40**, 1915, p. 101-178), j'ai montré que le problème était alors possible et d'une seule manière, et j'en ai donné la solution précise, en même temps que celle de certaines questions connexes.

Les méthodes ci-dessus décrites ont permis dernièrement d'élucider une foule de questions d'Hydrodynamique. Pour ces applications, ou du moins pour un grand nombre d'entre elles, un point essentiel a été la découverte d'une formule simple et pratique permettant de résoudre le problème de Dirichlet dans une aire annulaire (H. Villat, *C. R. Acad. Sc.*, t. **152**, 1911, et *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXXIII, 1912, p. 134-175); si l'on pose

$$\Omega(t) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$
$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(s)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds,$$

la partie réelle de $\Omega(t)$ prend pour $|t| = 1$ et pour $|t| = q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}$, les valeurs $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ respectivement, aux points d'argument s. Cette fonction $\Omega(t)$ est régulière et uniforme entre les deux cir-

conférences précédentes, si l'on a

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s)\, ds = \int_0^{2\pi} \Psi(s)\, ds.$$

En partant des mêmes principes que ceux dont on a parlé aux paragraphes antérieurs, U. Cisotti a généralisé les exemples connus jusque-là, de mouvements permanents continus irrotationnels, obtenus par la translation d'un solide de forme quelconque (*Annali di Math. pura ed applic.*, t. XIX, 1912, p. 83-107). A toute fonction analytique régulière pour $|t| > 1$, point à l'infini compris, il correspond une forme de profil, et inversement. Cisotti détermine la fonction qui correspond à un profil polygonal, à un profil circulaire, et il construit l'équation fonctionnelle que satisfait la fonction correspondant à un profil curviligne donné. Cette extension est du point de vue mathématique fort intéressante; elle perd malheureusement une partie de son intérêt, du fait que les résultats obtenus ne correspondent pas à des mouvements physiquement possibles (du moins sans modifications essentielles), car les conditions de pression partout positive sont nécessairement violées, comme on l'a déjà dit plus haut.

Les mouvements étant encore considérés comme continus, signalons une étude fort élégante, dérivée de la méthode des images, due à V. Vâlcovici (*Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. VIII, 1915, p. 309-323), relative au mouvement d'un fluide autour de plusieurs cylindres.

Supposant toujours l'absence de sillage, U. Cisotti a approfondi le problème de la dérivation des canaux (*Zeitschrift für Math. und Physik*, t. 59, 1911, p. 137-151). Sur le flanc d'un canal rectiligne, on suppose qu'on ouvre un canal dérivé faisant l'angle α avec la direction du courant principal. Si λ et γ représentent les rapports des largeurs et des débits respectivement du petit canal relativement au grand, on a la formule

$$\lambda = \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}-1} - \gamma^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \right]^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

qui pour χ petit peut être pratiquement réduite à

$$\lambda = \sqrt[\frac{\pi}{\alpha}]{\frac{\pi}{\alpha} - 1}\,\chi.$$

Dans un travail qui paraîtra prochainement, j'ai fait voir que les principes exposés plus haut pouvaient être appliqués avec succès à l'étude des mouvements cycliques d'un fluide illimité ou non autour d'un solide donné supposé fixe, ou encore entre deux solides donnés. Ici, le fluide n'étant animé aux grandes distances (si la configuration étudiée comporte des points à l'infini) d'aucun mouvement de translation, mais seulement d'une rotation générale, la nécessité d'une surface de discontinuité ne se présente pas en général, et elle n'a lieu d'intervenir que dans des cas faciles à préciser.

Étude des jets fluides. — Les jets fluides, limités par deux lignes de courant où la vitesse est constante, ont été étudiés tout d'abord par U. Cisotti (*Atti Lincei*, t. XIX, 1910, p. 10 et 81). En admettant des rotations dans le fluide, le problème revient à trouver une solution régulière de l'équation

$$\Delta\psi = F(\psi)$$

telle que ψ et $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$ prennent aux frontières des valeurs données. Il y a donc surabondance de conditions aux limites si l'on suppose les frontières données d'avance; celles-ci ne peuvent donc pas être choisies arbitrairement. Et en effet si l'on se borne aux mouvements irrotationnels ($F \equiv 0$), il n'y a qu'une seule solution possible, donnée par l'équation

$$z - z_0 = -iae^{\frac{it}{a}}$$

(les notations étant toujours les mêmes que dans les paragraphes antérieurs).

U. Cisotti a aussi envisagé le problème de deux jets fluides qui se rencontrent. Après le choc, le fluide se sépare en deux nouveaux jets qui s'échappent de part et d'autre. Si q, q', q_1, q_1' désignent les débits des deux jets incidents et des deux jets résul-

tants ($q + q' = q_1 + q'_1$) et si θ, θ', θ_1, θ'_1 sont les directions du courant à l'infini sur les quatre jets, on a les relations

$$q - q_1 \cos\theta_1 + q' \cos\theta' - q'_1 \cos\theta'_1 = 0,$$
$$q_1 \sin\theta_1 - q' \sin\theta' + q'_1 \sin\theta'_1 = 0.$$

Cisotti donne la détermination des éléments du mouvement dans le cas général, et étudie les cas particuliers où il y a symétrie par rapport à un axe ou par rapport à un point. Dans le cas général, il y a indétermination, un des paramètres du problème restant arbitraire : les circonstances qui accompagnent l'établissement du régime permanent doivent sans doute jouer un rôle important pour préciser dans chaque cas la solution qui s'impose.

La théorie précédente a été simplifiée par T. Boggio (*Atti R. Accad. di Torino*, t. 50, 1914-1915, p. 1103-1119) par cette remarque, que la région du plan z occupée par les jets correspond dans le plan w à l'aire d'un cercle dans lequel la construction de la fonction $f(w)$ est aisée; le reste s'en déduit sans introduction de la fonction auxiliaire Ω. Le problème peut être généralisé au cas de n jets confluents dans la même région, de façon que la vitesse soit nulle en un seul point intérieur au fluide.

La difficulté relative à l'indétermination signalée ci-dessus a été élégamment étudiée par A. Palatini (*Atti R. Ist. Veneto*, t. LXXV, 1915-1916, p. 451-461). Parmi l'infinité de solutions possibles dynamiquement lors du heurt de deux courants, la plus stable est celle pour laquelle le minimum de l'énergie totale est réalisé. Or il y a minimum pour l'énergie, lorsque la variation première de la somme des quatre débits est nulle. On en conclut que la solution la plus probable est celle pour laquelle les débits des deux jets résultants feront entre eux l'angle π; c'est ce dernier cas qui se présente pour le heurt symétrique de deux veines égales, qui peut donner lieu, comme lord Rayleigh l'avait soupçonné (*Sc. Papers*, t. V, p. 302, Cambridge, Univ. Press, 1899) à deux veines dérivées opposées l'une à l'autre.

B. Caldonazzo (*Ann. di Mat. pura ed applic.*, t. XXVI, 1916, p. 35-76) a généralisé les résultats précédents au cas de n veines, confluentes de telle manière qu'il s'établisse au sein du fluide p points de bipartition à vitesse nulle; le problème est ici encore en général indéterminé, et le théorème de Palatini peut être

étendu à ce cas : le minimum d'énergie est obtenu pour le mouvement où la somme des carrés des débits de toutes les veines est minimum.

Les configurations étudiées ci-dessus ne sont pas les seules possibles, et l'on peut montrer comme je l'indique dans un travail qui paraîtra prochainement, que deux jets fluides qui se rencontrent sous un angle α pas trop voisin de π peuvent continuer à se mouvoir après leur réunion, sous la forme d'un jet unique. Il serait intéressant d'étudier, pour différentes valeurs de α, si la configuration la plus stable comporte un ou deux jets dérivés.

L'écoulement des jets issus de parois solides a donné lieu à d'importants travaux. Après Kirchhoff, Michell (*Phil. Transact.*, t. CLXXXI, 1890, p. 389-431), Love (*Proceed of Cambridge Phil. Soc.*, t. VII, 1892, p. 175-201), Rethy (*Math. und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, t. XII, 1895, p. 144-194) avaient traité quelques cas très particuliers du problème. U. Cisotti (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXV, 1908, p. 145-179) réussit à traiter le cas le plus général au moyen du changement de variable

$$e^{if} = -ia\left[\cos s_0 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right].$$

La fonction $\Omega(t)$ est alors une série entière en t, à coefficients réels, sans terme constant, régulière pour $|t| \leqq 1$. La réaction dynamique R_x, R_y, du jet fluide sur le vase, est fournie par l'élégante formule (Cisotti, *C. R. Acad. Sc.*, t. 152, 1911, p. 180)

$$R_x + iR_y = \frac{1}{2}\rho\Omega_2 v_2^2\left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)e^{i\alpha} - 2\right]$$

dans laquelle ρ est la densité, α l'angle de la direction du jet avec la direction des filets en amont dans le vase, v_1, Ω_1, la vitesse et la section en amont dans le vase, v_2, Ω_2, la vitesse et la section du jet très loin en aval [1]. U. Cisotti illustra sa théorie par de nouveaux et intéressants exemples (*Circ. Palermo*, t. XXVI,

---

[1] T. Boggio (*Atti Lincei*, t. XX, 1911, p. 634-641), par une autre méthode valable pour trois dimensions, a généralisé ce résultat par une formule analogue, dans le cas, important pour la théorie des turbines, où le jet, libre d'abord, vient s'engager dans un tube solide d'où il s'échappe ensuite.

1908; *Atti R. Ist. Veneto*, t. LXVII, 1907-1908, p. 293-321). Le coefficient de contraction, rapport entre la section du jet à grande distance et la section à l'orifice même du récipient, se calcule élégamment (Levi-Civita, *Atti R. Ist. Veneto*, t. LXIV, 1905, p. 1465-1472; U. Cisotti, *Ibid.*, t. LXXIV, 1914-1915, p. 1499-1509). Dans les cas usuels, il est plus grand que $\frac{1}{2}$, ce qui est bien conforme à l'expérience et aux vues des hydrauliciens (J. Boussinesq, *Journal de Physique*, t. I, 1892, p. 265-285; Masoni, *Idraulica teorica e pratica*, Napoli, 1908). Cisotti décrit des cas où ce coefficient de contraction pourrait tomber au-dessous de $\frac{1}{2}$.

Il est clair que la méthode que j'ai exposée dans ma Thèse permet de former la solution de la question des jets lorsque le vase d'où s'écoule le courant a une forme donnée à l'avance. La validité de solutions peut s'étudier de même (H. Villat, *Journal de Mathématiques*, *loc. cit.*).

Un cas limite du problème précédent a tenté divers chercheurs : celui où l'on considère l'écoulement d'un fluide issu d'un récipient percé d'un trou infiniment petit. D'intéressants développements mathématiques ont été tirés de ce sujet, mais leur intérêt physique est moindre, les solutions envisagées comportant la présence de pressions infiniment grandes et négatives dans le fluide, au voisinage de l'orifice. Cisotti (*Atti dei Lincei*, t. XXII, 1913, p. 473-478; t. XXIII, 1914, p. 73-79) résout le problème du récipient rectangulaire, de largeur L, percé d'un trou au centre de la base, au moyen de la transformation

$$w = -\frac{q}{L}\coth\frac{\pi z}{L},$$

où q représente le débit. Si le récipient rectangulaire est percé d'un trou latéral à une hauteur h au-dessus du fond, on a

$$w = -\frac{q}{2L}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{L}}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi z}{2L} - \operatorname{ch}^2\frac{\pi h}{2L}}.$$

V. Valcovici (*Annales scientifiques de l'Université de Jassy*),

t. IX, p. 35-46) a généralisé ces résultats, en examinant, d'un autre point de vue, le cas d'un récipient percé de plusieurs orifices.

Écoulement des canaux et problèmes connexes. — G. Colonnetti (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXXII, 1911, p. 51-87) a étudié l'écoulement d'un fluide le long d'une paroi solide indéfinie, l'angle des vitesses à l'infini en amont et en aval, étant égal à α. Ce problème est très important, et permet d'éclaircir la théorie des turbines; on trouve, en effet, ce qui est conforme à l'expérience, que malgré un changement radical d'orientation, il n'y a pas de perte sensible de vitesse dans le jet. La pression exercée sur le fond du canal est, en supposant la vitesse égale à 1 à l'infini, donnée par

$$\mathfrak{P}_x + i\mathfrak{P}_y = 2i\pi \sin\frac{\alpha}{2}\, e^{i\frac{\alpha}{2}},$$

l'axe des x étant choisi parallèle au courant en aval. La recherche de la solution pour un profil de fond donné à l'avance peut être faite comme je l'ai indiqué (H. Villat, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911). G. Colonnetti remarque que si la paroi qui guide le fluide est convexe vers celui-ci, ou s'il présente quelque point anguleux, le phénomène ne peut se maintenir partout continu et irrotationnel : les conditions de validité s'étudieraient par le procédé que j'ai développé (*Journal de Mathématiques*, 1914).

Le flux d'un courant entre deux parois solides indéfinies dont l'une présente une interruption a été étudié par G. Colonnetti (*Atti dei Lincei*, t. XX, 1911, p. 649-655 et 789-797) qui illustre ainsi le phénomène de Venturi (*cf.* à ce propos les recherches de J. Boussinesq); T. Boggio envisage le cas d'un jet fluide guidé par une paroi solide sur une partie seulement du jet, et d'un seul côté (*R. Accad. Sc. di Torino*, t. XLVI, 1911, p. 1-26).

L'écoulement des jets entre deux parois interrompues l'une et l'autre sur une partie du trajet est spécialement intéressant, à cause de l'analogie avec le phénomène qu'on voit dans la réalité quand par exemple il se produit un brusque changement de sec-

tion dans un canal : il arrive alors que le fluide, sur une partie de son parcours, cesse de glisser sur la paroi même. Ce problème, notablement plus difficile que les précédents, a été traité en détail par B. Caldonazzo (*Annali di Mat. pura ed applicata*, t. XXV, 1916, p. 33-98). La solution générale résulte de la formule que j'ai donnée (*Circolo di Palermo*, 1912) pour le problème de Dirichlet dans un domaine annulaire. Le cas le plus intéressant, et qui conduit à d'importantes applications pratiques, est celui où le champ du mouvement possède un axe de symétrie qui traverse le champ sans y être entièrement contenu (le cas écarté ainsi se ramène très simplement à celui traité par G. Colonnetti). Supposons les parois rectilignes, en sorte que le fluide sorte d'un tube à parois parallèles, et rentre plus loin dans un second tube faisant avec le premier l'angle α. Alors, si 1 et $c(<1)$ sont les vitesses sur les deux bords du jet joignant les parois, ces deux bords sont homothétiques l'un de l'autre dans le rapport c^2, et celle où la vitesse est égale à 1 a pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{K'}{\alpha}\sqrt{(1-e^{-2s})(1-k^2e^{2s})} \qquad \left(0 \leq s \leq \log\frac{1}{k};\ \frac{K}{K'} = -\frac{1}{\alpha}\log c\right);$$

k est le module des fonctions elliptiques introduites par la solution, K et K′ sont les intégrales complètes correspondantes.

Dans les cas que nous venons d'examiner, la détermination exacte des lignes de jet, est pour l'ingénieur, d'un certain intérêt, car elle permet, par exemple, de donner à coup sûr aux conduites d'eau, dans les courbes ou étranglements, des profils évitant toute fatigue aux parois, celles-ci étant uniquement soumises à la pression hydrostatique.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REY PASTOR (J.). — FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA SUPERIOR. (Laboratorio y Seminario matemático. Publicaciones : Tomo I.) 1 vol. gr. in-8, XXII-445 pages. Madrid, Junta para ampliación de estudios e investigaciones cientificas. Moreto, I, 1916.

Sans faire un traité systématique de Géométrie projective, M. Rey Pastor réunit dans ce Livre l'étude de questions se rattachant à divers domaines de la Géométrie projective et qu'il juge essentielles à son développement. On ne trouvera pas dans ce Livre de résultats importants essentiellement nouveaux. Sans doute, à côté de pages où l'auteur, dans l'exposé critique de théories actuellement classiques, fait preuve d'appréciables qualités de clarté et de finesse, on en trouvera d'autres où, par exemple dans la théorie projective des hyperespaces, l'auteur complète et coordonne les travaux de ses devanciers. Pourtant les chapitres les plus originaux du Livre me semblent ceux où l'auteur entreprend, par des méthodes purement synthétiques (les seules qu'il utilise dans tout le cours de son travail), l'étude de questions abordées jusqu'à présent par des procédés analytiques et semblant presque imposer l'emploi de tels procédés.

La première Partie du Livre « Sistematizacion de la Geometria » en constitue en somme une longue préface. L'auteur a voulu situer, dans l'ensemble des recherches géométriques, la théorie dont il s'occupe. Il reprend donc l'exposé des idées précisées par Klein dans son « programme d'Erlangen ». Les applications des considérations générales sont nombreuses, traitées avec assez de développement, et la suite des idées en ressort, particulièrement limpide.

L'auteur consacre d'abord quelques pages à l'étude des propriétés élémentaires des groupes de transformation. L'étude des propriétés qui font l'objet de la Géométrie élémentaire le conduit alors à la définition la plus générale d'une géométrie (Klein) comme équivalente à l'étude des invariants relatifs à un groupe de transformations d'une multiplicité.

L'examen des relations entre les géométries projective et métrique élémentaires, l'analyse des deux méthodes (projective et métrique) qui servent à traiter la Géométrie métrique, lui permettent d'établir le principe général qui relie la géométrie d'un groupe à celle d'un de ses sous-groupes. Il montre comment les remarques précédentes éclairent les rapports mutuels des diverses disciplines géométriques (géométries élémentaires, géométrie des rayons vecteurs réciproques, géométrie sphérique de Lie, géométrie projective supérieure et géométries transcendantes). J'indique ici que l'auteur nomme *Géométrie projective supérieure* celle qui a pour groupe caractéristique celui de toutes les collinéations d'un espace abstrait à un nombre quelconque de dimensions, et qu'incidemment il donne ici une idée de quelques sous-groupes du groupe projectif (groupe projectif de E_n avec une courbe normale invariante, avec une quadrique C^2_{n-1} ou C^2_{n-2} invariante, notions sur les courbes W de Klein-Lie.

M. Rey Pastor montre enfin la portée du principe d'équivalence entre des géométries fondées sur des groupes se correspondant dans des multiplicités différentes. Il montre en particulier comment toutes les géométries non transcendantes sont équivalentes à d'autres fondées sur des sous-groupes du groupe projectif de E_n. Il note en passant l'importance que, grâce au théorème de Fano, les méthodes projectives prennent dans l'étude des transformations crémoniennes. Il conclut, pour montrer l'intérêt de l'étude qu'il a entreprise, que l'on peut reprendre actuellement, convenablement entendu, le mot de Cayley : *Projective Geometry is all Geometry*.

Au début de la deuxième Partie de son Livre, *Fundamentos de la Geometria proyectiva real*, l'auteur indique les divers points de vue des savants qui ont effectué, dans la seconde moitié du XIXe siècle, la critique des fondements de la Géométrie élémentaire et l'édification rigoureuse de cette science. Il s'occupe ensuite de la construction axiomatique de l'espace projectif. Il utilise successivement les deux méthodes qui permettent de construire, à l'aide de seuls axiomes graphiques, l'espace projectif.

Il suit d'abord pour construire l'espace projectif E_3 la méthode de Klein (fondation axiomatique de la géométrie d'un espace fini : création de l'espace projectif par l'introduction des points, droites

et plans impropres). Le système d'axiomes qu'il utilise est peu différent de celui de Pasch. Il donne une démonstration nouvelle de leur compatibilité et de leur indépendance.

Pour construire l'espace projectif abstrait E_n, il utilise au contraire la méthode plus simple, et moins parfaite logiquement, qui consiste à poser *a priori* le concept de droite projective et ses propriétés (détermination par deux points; si les droites AB et CD concourent, de même AD et CB). Ces seuls axiomes lui permettent d'étudier, avec élégance, l'intersection des espaces projectifs abstraits à un nombre quelconque de dimensions et leur loi de dualité.

On sait que les axiomes graphiques précédents permettent de définir, grâce au quadrilatère complet, les groupes harmoniques de quatre points; mais qu'il est impossible de démontrer le théorème fondamental de la projectivité, sans introduire un axiome de continuité. L'auteur énonce cet axiome sous forme projective. Je note qu'auparavant et en se bornant, ici comme le plus souvent dans la suite du livre, à l'espace projectif élémentaire, l'auteur étudie, sous le nom de *réseau de Möbius*, l'ensemble des points d'une droite déduits de trois d'entre eux en prenant le conjugué de chacun par rapport aux deux autres et en répétant l'opération pour les nouveaux points obtenus. Cet ensemble joue le rôle de l'ensemble des points à coordonnées rationnelles et la question que doit résoudre l'axiome de continuité se trouve aussi clairement posée : y a-t-il des points de la droite projective n'appartenant pas à un réseau de Möbius. Le réseau de Möbius permet aussi d'introduire, avec élégance et sans considérations métriques, les coordonnées en Géométrie projective. La fin de ce Chapitre sur la continuité est consacrée à quelques notions sur les ensembles, courbes et domaines projectifs et sur les correspondances continues : l'auteur s'exagère l'originalité qu'il peut y avoir à appliquer ces notions à l'espace projectif.

M. Rey Pastor établit enfin le théorème fondamental de la Géométrie projective (toute correspondance biunivoque entre les points d'une droite conservant les groupes harmoniques se réduit à l'identité si trois points coïncident avec leurs homologues). Il a fait une excellente étude historique de la question (critiques à la démonstration de Staudt; recherches de Klein, Zeuthen, Lüroth, Darboux, Thomæ, Reye).

Sans s'astreindre alors à développer systématiquement la Géométrie projective réelle, l'auteur étudie, non sans originalité, quelques questions importantes pour la suite : propriétés des corrélations et des collinéations de E_n ; systèmes polaires (il en déduit, comme lieu des points doubles d'un tel système, les quadriques de l'espace E_n) ; projection stéréographique sur une quadrique non réglée (en insistant sur les propriétés qui, dans le cas de la sphère, expriment que la représentation est conforme) ; étude des collinéations qui laissent invariante une quadrique Φ^2_{n-1}, recherche de celles qui sont involutives ; enfin, par projection stéréographique, étude des transformations quadratiques biunivoques.

Le Chapitre « Calcul vectoriel projectif » qui termine les études de M. Rey Pastor sur la Géométrie projective réelle commence par un rappel des propriétés des produits des projectivités et des projectivités cycliques. Les 32 pages qui suivent pourraient, avec grand avantage de simplicité, être réduites au quart. C'est une remarque banale que toutes les propriétés métriques prennent, si l'on remplace la droite de l'infini et l'involution absolue par une droite et une involution quelconque, un énoncé projectif. L'auteur aurait donc pu faire remarquer que les concepts qu'il introduit ici coïncident avec des concepts métriques très élémentaires et se dispenser d'en reprendre l'étude par des méthodes projectives : cette étude étant évidemment possible grâce à la remarque précédente.

Par exemple l'auteur nomme *segment projectif* l'ensemble de deux points d'une droite sur laquelle est choisi un point fondamental (segment de première espèce), ou une involution fondamentale (segment de deuxième espèce). Deux segments sont égaux quand on peut passer de l'un à l'autre par une projectivité ayant le point fondamental comme point double unique ou conservant l'involution fondamentale. Il est clair que ces notions de segment projectif de première et deuxième espèce reviennent aux notions métriques euclidiennes de segment et d'angle (si l'involution fondamentale est elliptique, et c'est le seul cas intéressant).

De même les dilatations, translations et torsions projectives qu'introduit M. Rey Pastor et qu'il représente par des couples

de points du plan se ramènent aux homothéties, translations et similitudes de la Géométrie ordinaire. Sans exception, toutes les propriétés de ces dilatations, translations et torsions que démontre l'auteur, ne sont que la traduction projective, sous une forme rébarbative, de propriétés très simples des transformations élémentaires correspondantes, ou s'en déduisent par dualité.

Dans la dernière Partie du Livre M. Rey Pastor étudie les fondements de la Géométrie projective complexe. Je répéterai, à ce propos, la remarque précédente : l'exposition pouvait être rendue, en bien des points, plus intuitive par l'emploi du langage métrique ; l'auteur l'a fait quelquefois dans le dernier Chapitre.

M. Rey Pastor définit, selon Staudt, le point imaginaire d'une droite par l'ensemble d'une involution elliptique et d'un sens positif sur la droite. Il expose, selon Staudt et August, la génération de l'espace complexe E_n. Comme il le montre enfin, la construction faite, dans la deuxième Partie du Livre, de l'espace abstrait E_n fournit, comme immédiate application, et de façon notablement plus simple, la génération de l'espace complexe E_n.

L'auteur étudie alors les représentations, par des éléments réels, des formes linéaires complexes. J'indique celles qui ont un intérêt pratique. Il nomme *représentation de Gauss* celle qui fait correspondre, à chaque point réel ou non d'une droite réelle, le point réel de la droite obtenue en le joignant à un point imaginaire Ω; c'est au fond la représentation classique des nombres complexes. En projetant stéréographiquement sur une quadrique convenablement choisie, on en déduit la représentation dite de Riemann; cette représentation est d'ailleurs projectivement équivalente à la représentation sphérique utilisée par Riemann. On peut enfin faire correspondre, à un couple de points imaginaires d'une conique, le centre de l'involution qui définit ces points; cela revient à projeter la représentation sphérique sur un méridien de la sphère.

L'étude que fait l'auteur, grâce à ces représentations, de la projectivité entre deux formes linéaires complexes, est notablement plus simple et plus élégante que les théories également synthétiques de Staudt et Kötter. Aux groupes de points harmoniques correspondent, dans la représentation de Riemann, par exemple, des points situés sur une conique et se divisant harmoniquement.

Les correspondances biunivoques qui, dans cette représentation, transforment les coniques en coniques constituent les projectivités et les antiprojectivités. Ces correspondances engendrent, entre les espaces des deux quadriques fondamentales, une collinéation faisant se correspondre les quadriques; leurs propriétés en résultent immédiatement.

Dans l'essai, qui termine le Livre, d'une étude synthétique des correspondances algébriques et même analytiques, l'auteur suit en gros la même marche que pour l'étude analytique de ces questions. Ses démonstrations sont souvent très originales.

L'étude infinitésimale d'une correspondance conforme (au sens projectif) au voisinage d'un couple AB de points homologues lui permet d'introduire un point dérivé C, dont l'existence, qui caractérise les représentations conformes, revient au fond à l'existence d'une dérivée pour la fonction variable complexe qui définit la correspondance. Naturellement, la correspondance A, C, dite *correspondance dérivée*, est elle-même conforme, ainsi que les correspondances dérivées successives.

La correspondance algébrique entre deux formes linéaires complexe est alors définie comme correspondance (m, n) telle que la correspondance entre les représentations réelles des deux formes soit conforme. La principale difficulté, pour la théorie synthétique, réside dans la démonstration du théorème fondamental : le nombre des points de coïncidence d'une telle transformation est $m + n$, à moins que tous les éléments ne soient de coïncidence. L'auteur tire cette démonstration de l'étude synthétique d'une correspondance dite « dérivée par différence » de la correspondance donnée : analytiquement ce serait la correspondance entre x et $z = y - x$, si x et y sont les deux variables en relation algébrique (m, n). Les x des points de coïncidence sont les homologues de $z = 0$. Qu'ils soient en nombre $m + n$, cela résulte de ce que, le point à l'infini n'étant pas de coïncidence, quand x décrit un certain contour, le nombre de tours qu'effectue z autour de l'origine est lié simplement au nombre des points de coïncidence et des points homologues de $z = \infty$, enfermés par le contour de x. Je crois que les recherches de l'auteur, fort intéressantes, auraient besoin d'être complétées : l'étude synthétique des points critiques de ces correspondances paraît insuffisante.

Le théorème fondamental ainsi établi, l'auteur démontre quelques propriétés des correspondances algébriques; en particulier le fait qu'une correspondance (1, 1) est une homographie. Il développe enfin, par voie de récurrence, la théorie des courbes normales de E_n et des involutions d'ordre n.

Le dernier Chapitre, consacré à la définition synthétique de la courbe analytique, se rattache étroitement au précédent. De toutes les représentations réelles qu'indique l'auteur, pour les points imaginaires du plan, la seule qu'il utilise revient, au point de vue métrique, à une représentation utilisée par Laguerre. On fait correspondre à chaque point imaginaire les deux points réels A et B des droites isotropes qui y passent; ces points étant pris dans un certain ordre pour distinguer les points imaginaires conjugués. L'auteur nomme *membrane* d'éléments complexes l'ensemble des points complexes définis par une correspondance continue A, B. La membrane forme un arc de courbe analytique si elle admet une tangente; M. Rey Pastor prouve que cela exige que la correspondance AB soit conforme inverse.

L'auteur nomme *symétrie* par rapport à la courbe cette correspondance qui peut servir à la définir. Je signale en passant que cette correspondance n'est point nouvelle et a d'intéressantes applications; pour n'en citer qu'une, M. G. Léry l'utilise dans la recherche de la fonction de Green d'un contour algébrique (*Annales de l'École Normale*, 1915).

Je regrette de ne pouvoir donner ici une idée des démonstrations qui, dans toute cette fin du Livre, sont très personnelles. Les méthodes purement synthétiques qu'utilise l'auteur sont actuellement inférieures, pour l'exposition comme pour la rercherche, aux méthodes analytiques. Ce n'est pas une raison pour négliger des tentatives comme celles de l'auteur, qui, en plus de leur intérêt de curiosité, peuvent se révéler fructueuses dans l'avenir.

JOSEPH PÉRÈS.

FABRY (E.). — Problèmes de Mécanique rationnelle *à l'usage des candidats aux certificats de licence et à l'agrégation.* 1 vol. gr. in-8, 425 pages, avec 14 figures. Paris, A. Hermann et fils, 1915

La Mécanique peut être réduite à quelques principes, et, si l'on veut même, à une seule équation. Les énoncés de ces principes, l'écriture de cette équation apparaissent comme très simples grâce aux termes concis où les mathématiciens sont parvenus à les enfermer. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de revenir au concret. On s'aperçoit alors que ces termes, ces symboles aux formes concises possèdent une compréhension singulièrement étendue et qu'ils sont susceptibles de recevoir des significations ou des modalités extrêmement diversifiées. On constate que c'est une difficulté spéciale à chaque cas d'y découvrir, sous la forme particulière qu'il y revêt, le principe qu'il convient d'invoquer.

Nulle science, sous ce rapport, ne fait mieux ressortir l'inconvénient d'un enseignement aux allures trop générales et trop implicites. La Géométrie, elle aussi, pourrait se plaindre de ce genre d'enseignement ; mais le défaut de celui-ci éclate surtout en Mécanique.

On serait presque tenté de dire que les principes de la Mécanique et leur démonstration ne constituent que la préface de cette science. La tractation de problèmes spéciaux, poussés au besoin jusqu'au résultat numérique, est le commentaire indispensable à cette abstraite préface ; la réalité que ces applications donnent aux principes constitue à proprement parler la Mécanique.

C'est pourquoi il est si désirable que de bons Recueils d'exercices viennent seconder l'Enseignement. Recueils où des solutions, conduites dans un esprit vraiment mécanique, montrent la bonne route à l'étudiant.

Ce serait un tort de substituer à l'emploi direct des principes des équations où ceux-ci soient si implicitement contenus que leur rôle n'apparaisse plus et que la solution du problème de Mécanique se trouve réduite à un jeu d'algèbre d'où tout ce qui a une figure mécanique soit exclu.

Il n'y a pas lieu de prolonger ici ces réflexions qu'ont dû se faire tous ceux qui ont approché de près les examens de nos grandes écoles. Le savant professeur de la Faculté des Sciences de

Montpellier, dont nous analysons l'Ouvrage, est, à cet égard, aussi averti que qui que ce soit.

Le Recueil de problèmes de Mécanique qu'il offre au public comprend des exercices sur la Cinématique, la Dynamique du point, les moments d'inertie, le mouvement d'un corps solide, le mouvement des systèmes, les mouvements relatifs, les percussions et, enfin, l'Hydrostatique et l'Attraction.

Les énoncés sont imprimés séparément dans les premières pages de l'Ouvrage afin que l'élève, après avoir pris connaissance de l'énoncé, puisse essayer d'abord lui-même la solution sans être tenté de lire celle que l'auteur lui donne quelques pages plus loin et à laquelle il pourra plus tard comparer la sienne. Cette disposition ingénieuse seconde une méthode de travail excellente; elle tend à développer l'initiative de l'étudiant tout en lui réservant le bénéfice d'un guide et d'un conseil.

Plus des deux tiers de ces exercices ont été proposés en ces dernières années dans nos Facultés aux épreuves de licence; c'est dire que leur esprit répond bien à celui de l'enseignement de la Mécanique dans nos Universités françaises.

Les solutions qui suivent les énoncés ont toute la justesse que l'on peut attendre de l'éminent professeur de Montpellier. Nous ne saurions évidemment les parcourir ici une à une. Nous nous bornerons à évoquer celles qui nous auront le plus frappé.

Citons en Cinématique la question 7 :

Si deux côtés d'un triangle de forme invariable enveloppent chacun une circonférence, il en est de même du troisième côté.

J'avoue avoir une préférence pour les solutions cinématiques dans le genre de celle que l'auteur a donnée de ce problème. En mettant en jeu des théorèmes et des résultats acquis en Cinématique, elles font prendre à la question une allure vraiment cinématique. Elles apprennent aux étudiants à raisonner sur la matière cinématique elle-même, savoir précieux pour qui désire se servir effectivement de la Cinématique. En dehors de cette méthode, les questions de Cinématique versent fatalement dans la pure Géométrie analytique.

Nous constatons avec plaisir que plusieurs des exercices ont trait à l'usage d'un trièdre de référence mobile que les travaux de Ribaucour et de Darboux ont rendu classique.

Parmi les problèmes de Statique, signalons un choix de questions concernant les fils inextensibles ou même extensibles. En supposant l'extension spécifique proportionnelle à la tension, on se place dans des conditions assez voisines de la réalité.

M. E. Fabry me permettra-t-il une toute petite chicane à propos d'un problème du reste très complètement traité par la voie analytique avec discussion de la stabilité de l'équilibre ?

Il s'agit de l'équilibre de trois points A, B, C assujettis à rester sur un cercle et qui se repoussent proportionnellement à leurs masses et à leur distance.

La solution analytique, semble-t-il, laisse échapper la signification *mécanique* de la solution. On sait que, d'après un théorème connu, la résultante des actions de deux des points sur le troisième va passer au centre de gravité du système. Si les points forment un triangle (le cas contraire se traite aisément de même), le centre du cercle circonscrit doit être *le centre de gravité* des trois masses. On reconnaît en même temps que le même résultat s'étend au cas d'un nombre quelconque de points et au cas où il s'agirait d'une sphère au lieu d'un cercle. Si les points devaient être sur une courbe ou sur une surface, il faudrait que chacun d'eux fût en un pied de normale issue du centre de gravité à la courbe ou à la surface.

En se plaçant ainsi tout d'abord sur le terrain *mécanique*, on devient maître de la question que l'on tient par sa racine même et le bénéfice en est que l'on aperçoit aussitôt à quelle catégorie plus générale le problème que l'on traite appartient. Du reste, le problème s'achève ensuite facilement par le développement de cette propriété mécanique.

On peut faire une remarque du même genre à propos d'une question de mouvement de point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance avec résistance opposée à la vitesse et proportionnelle à celle-ci. Il s'agit de prouver que la trajectoire est plane (question 45).

L'auteur remarque que, en projection sur l'un des axes, Oz par exemple (O est le centre fixe), l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - h\frac{dz}{dt},$$

où k, h sont des constantes. Si z et $\frac{dz}{dt}$ sont nuls à l'instant ini-

tial, il en est de même des dérivées seconde, troisième, etc., et, d'après le théorème de Cauchy, la solution correspondante est $z = 0$, en sorte que la trajectoire est dans le plan passant par le centre attractif et la vitesse initiale. Cette démonstration analytique est simple, exacte; elle donne l'occasion d'appliquer un théorème général d'analyse.

On aurait pu se placer cependant sur un autre terrain, considérer le moment $\overrightarrow{OG}$ de la quantité de mouvement et le moment $\overrightarrow{OH}$ de la force en se rappelant que ce dernier est la vitesse du point G (ou dérivée géométrique de $\overrightarrow{OG}$). On aurait pu remarquer que la force attractive ayant un moment nul, $\overrightarrow{OH}$ se réduit au moment de la résistance et qu'ainsi $\overrightarrow{OH}$ est porté par la même droite que $\overrightarrow{OG}$. La conclusion est alors que la vitesse de G se réduit à sa composante suivant le rayon vecteur ou qu'elle passe par le point fixe O. Or on peut démontrer en Cinématique que, dans ce cas, la trajectoire de G est une droite fixe issue de O. Le plan normal à $\overrightarrow{OG}$ est fixe, c'est celui qui contient la vitesse et l'origine. Le mouvement a donc lieu dans ce plan fixe.

Cette démonstration n'a aucune visée analytique, mais, *au point de vue mécanique*, elle met en relief la *vraie raison* du théorème et nous apprend qu'il serait encore vrai, quelle que fût la loi d'attraction centrale et la loi de résistance pourvu qu'elle fût dirigée en sens inverse de la vitesse.

On ne saurait faire un grief à l'auteur d'avoir suivi en ces deux circonstances la méthode analytique. Ces procédés sont courants aujourd'hui et ma critique a une portée générale. Si j'ai relevé ces deux exemples, c'est pour montrer que la méthode analytique ne donne pas tout et qu'elle ne saurait dispenser d'aborder la Mécanique par ses propres moyens.

Il va sans dire que ces réflexions n'ôtent rien aux raisons d'estime que porte en lui le Recueil de M. E. Fabry. Les ayant faites, je n'en suis que plus à l'aise pour louer l'ensemble des jolies questions qui se trouvent traitées avec le plus grand soin sous les titres de : mouvement d'un corps solide, mouvement des systèmes, mouvements relatifs, percussions.

Les problèmes de ce dernier ordre ont la plus grande importance. Ils sont délicats et exigent pour être bien traités un correct exercice du sens mécanique. Je signalerai entre autres la question 109, donnée à la licence par la Faculté des Sciences de Marseille, le choc s'y trouve mis en jeu avec intervention du frottement.

Nous souhaitons cordialement à l'intéressant Recueil de M. le professeur E. Fabry tout le succès que mérite à son auteur l'effort appréciable qu'il a fait pour doter nos étudiants d'un excellent guide, en harmonie avec les traditions de notre enseignement.

Venant après tant d'autres Livres d'enseignement publiés par M. le professeur E. Fabry, il ne peut manquer d'accroître la somme de gratitude que le public mathématicien doit à son savant auteur.

G. Koenigs.

MÉLANGES.

QUELQUES RÉCENTS PROGRÈS DES THÉORIES HYDRODYNAMIQUES;

Par M. Henri Villat.

(*Suite et fin.*)

Bien que ce ne soit pas ici le lieu d'exposer en détail les travaux concernant la propagation des ondes, nous devons signaler les importants Mémoires de T. Levi-Cività sur les ondes progressives permanentes dans un canal à fond rectiligne (*Atti dei Lincei*, t. XVI, 1907, p. 777-790; t. XXI, 1912, p. 3-14), cette étude relevant des méthodes dont nous nous occupons dans cet article. Si H est la hauteur moyenne, λ la longueur d'onde, c la vitesse de translation des ondes, q le débit relatif (par rapport à des axes animés de la vitesse c), T. Levi-Cività montre que le transport global de masse croît indéfiniment avec le temps (théorème généralisé de Stokes-Rayleigh) et que l'énergie cinétique

d'une onde est donnée par la formule nouvelle

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda c^2}{2}\left(\mathrm{H} - \frac{q}{c}\right).$$

Une intumescence, d'un tout autre caractère que celle des ondes précédentes, est produite dans un canal à fond rectiligne, si un obstacle est placé en quelque point de celui-ci; il en résulte un soulèvement de la surface libre, qui peut être étudié par la transformation

$$f = i\mathrm{H} + \frac{2\mathrm{H}}{\pi}\log\frac{1-t}{1+t}.$$

Si l'obstacle est de dimensions petites (de hauteur h), la hauteur de l'intumescence est $\frac{\pi h^2}{4\mathrm{H}}$ (U. Cisotti, *Atti dei Lincei*, t. XXI, 1912, p. 588-593, 704-708, 760-764). Si le fond du canal présente une série périodique d'obstacles identiques placés à la distance λ, la surface libre présentera l'aspect d'une série d'ondulations de longueur d'onde λ. Une transformation de la forme

$$f = \frac{i\nu}{2\pi}\log\frac{t}{q}$$

et l'introduction d'une fonction $\Omega(t)$ déterminée par U. Cisotti, et qu'on peut exprimer aisément au moyen des fonctions elliptiques de module $q = e^{-\frac{2\pi\mathrm{H}}{\nu}}$, sous la forme (H. Villat, *C. R. Acad. Sc.*, t. 153, 1911, p. 518; Athènes, *Xenia*, 1912, p. 359-380; *Atti dei Lincei*, t. XXI, 1912, p. 138-140)

$$\Omega(t) = \frac{i}{2}\log\frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$

permet d'étudier les circonstances du mouvement. Pour h (hauteur des obstacles) faible, on trouve une surface libre voisine de la suivante :

$$y = \mathrm{H} + \frac{2\lambda}{\pi}e^{-\frac{2\pi\mathrm{H}}{\lambda}}\,\mathrm{th}^2\frac{\pi h}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Si, au lieu d'un obstacle placé sur le fond, celui-ci présente au contraire une nivellation ou un brusque changement de niveau,

le phénomène s'étudie tout à fait de même (U. Cisotti, *Atti dei Lincei*, t. XXII, 1913, p. 417-422, 580-584).

Malheureusement, dans les exemples ci-dessus, la présence de pressions négatives dans le voisinage de chaque obstacle ou dénivellation fausse légèrement les résultats quant à leur valeur pratique. A ce propos, je signale, comme extrêmement difficile, l'intéressante question suivante : prenons par exemple le cas du canal avec dénivellation brusque; pour poser ce problème correctement, en évitant les pressions négatives, nous devons évidemment essayer l'hypothèse suivante : le fluide, après avoir glissé sur la première partie (horizontale) du fond, s'en détache pour former un jet qui ira se raccorder plus loin avec la seconde partie (également horizontale) du fond. Or il est facile de faire voir qu'en prenant des unités convenables, la transformation

$$f = \log \xi_{30} t$$

ramène la question à la recherche d'une fonction analytique $\Omega(t)$ régulière dans un rectangle construit sur les demi-périodes ω_1 et ω_3, et telles que : sa partie réelle soit nulle sur les bords horizontaux du rectangle, et que sa partie imaginaire soit nulle sur le bord vertical gauche, et constante sur le bord vertical droit. C'est là un problème qui rentre comme cas très particulier dans un de ceux que j'ai résolus dans un Mémoire *Sur la résolution de certaines équations intégrales, etc.* (H. Villat, *Acta mathematica*, t. 40, 1915, p. 101-178). Or le résultat est que le problème est impossible à moins que la constante correspondant au bord vertical droit ne soit nulle, et alors la fonction analytique cherchée est identiquement nulle; on constate ensuite, en revenant au plan z, *que la dénivellation a disparu :* les deux portions du fond du canal sont au même niveau. Il serait important et utile de déterminer quelle autre hypothèse serait dans ces conditions nécessaire pour résoudre la question posée.

L'étude des jets de largeur finie rencontrant un solide, avec bifurcation de la veine à l'arrière de celui-ci, a été faite par U. Cisotti (*Atti dei Lincei*, t. XX, 1911, p. 314-322, 494-502) [1].

---

[1] *Cf.* aussi F. Wittenbauer, *Zeitschrift für Math. und Physik*, t. XLVI, 1901, p. 182-198.

Si θ_1 et θ_2 sont les inclinaisons des jets dérivés après la bifurcation, sur la direction du jet primitif, et si h_1 et h_2 sont les débits de ces deux jets, la pression totale du fluide sur le solide est donnée par la formule

$$\mathcal{R}_x + i\mathcal{R}_y = h_1 + h_2 - h_1 e^{i\theta_1} - h_2 e^{i\theta_2}.$$

Cette relation a été généralisée, dans le cas de trois dimensions, par T. Boggio (*Atti dei Lincei*, t. XX, 1911, p. 901-908) qui détermine aussi le moment résultant des pressions sur le solide. Elle a été retrouvée, ainsi que plusieurs autres relations importantes de même nature, par V. Vâlcovici (*Annali di Mat. pura ed applic.*, t. XXIII, 1914, p. 27-41) au moyen d'une méthode extrêmement simple et élégante.

Mouvements des solides dans les canaux et problèmes connexes. — Avec le problème du mouvement d'un solide dans un canal nous abordons une série de questions plus malaisées à élucider, et qui dépendent de la représentation du domaine fluide, sur l'aire d'une demi-couronne circulaire dans le plan t auxiliaire. Le cas où le mouvement (et le solide) sont symétriques par rapport à l'axe du canal supposé rectiligne a été abordé par U. Cisotti (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1909, 2e semestre). En supposant le débit du canal égal à 2π, et la vitesse égale à 1 à l'infini en amont, on peut, par la relation

$$(e_1 - e_3)e^{-f} = e_1 - \wp\left(\frac{2\omega_1}{i\pi}\log t + \omega_2\right),$$

faire correspondre au fluide la demi-couronne annoncée [1].

Si l'on pose

$$\Omega_0(t) = -\frac{2\alpha i}{\pi}\int_t^{\omega_1} \xi_{03}\, t\, dt = -\frac{i\alpha}{\pi}\log\frac{\xi_{12}\omega_3 + \xi_{12}t}{\xi_{12}\omega_3 - \xi_{12}t},$$

et si l'on admet que la paroi solide comporte un seul point anguleux à la proue, où les tangentes fassent l'angle 2α, la fonction $\Omega(t)$ la plus générale est égale à $\Omega_0(t)$, augmentée d'une

---

[1] Au sujet de la légère différence entre cette formule et celle employée par U. Cisotti, *voir* H. Villat, *Sur les mouvements à la Helmholtz* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XL, 1912, p. 266-304, note de la page 268).

série de Laurent régulière dans la couronne, et de la forme

$$\sum_0^\infty c_n\left(t^{2n+1} - \frac{q^{2n+1}}{t^{2n+1}}\right),$$

les c_n étant réels.

J'ai montré (*Bull. Soc. math.*, 1912) que dans toute hypothèse la solution générale était

$$\Omega(t) = -\frac{ai}{\pi}\int_0^{\omega_1}[\xi_{03}(t+r) - \xi_{03}(t-r)]\Phi(r)\,dr,$$

la variation de la fonction $\Phi(r)$ pour r entre o et ω_1, étant celle de l'inclinaison de la tangente à la paroi, sur l'axe du canal, quand on suit cette paroi à partir de la proue. Ce résultat permet (H. Villat, *loc. cit.*) la formation d'exemples correspondant à des solides de forme donnée. La pression totale du fluide sur le solide est égale, avec les unités choisies, au carré de la demi-largeur asymptotique du sillage, divisé par la demi-largeur du canal (Cisotti). La validité des solutions n'est assurée que si certaines conditions sont remplies. Elle est assurée par exemple pour la fonction (H. Villat, *loc. cit.*)

$$\Omega(t) = \frac{1}{\pi}\left[\sqrt{e_1 - e_3}(\xi_{10}t) \times \log\frac{\xi_{20}t + \xi_{20}\omega_3}{\xi_{20}t - \xi_{20}\omega_3} + i(e_1 - e_2)\log\frac{\xi_{12}\omega_3 + \xi_{12}t}{\xi_{12}\omega_3 - \xi_{12}t}\right]$$

qui fournit un obstacle convexe en forme de proue (au sens de M. Brillouin). L'étude des conditions générales pour qu'il en soit ainsi fait l'objet de la seconde partie d'un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (H. Villat, *J. de Math.*, t. X, 1914, p. 230-290). On peut démontrer notamment que pour toute forme de solide concave vers le courant, et pour laquelle la tangente à la paroi fait avec la direction du courant à l'infini un angle compris entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$, la solution est certainement valable; pour les solides à parois convexes, jusques et y compris le cas des proues, on a une condition nécessaire d'inégalité relative à la fonction $\Phi(r)$.

Si le canal, au lieu d'être rectiligne, est limité par des parois solides quelconques données, le problème se complique quelque peu. La solution (H. Villat, *C. R. Acad. Sc.*, 6 février 1911;

Annales de l'École Normale supérieure, t. 29, 1912, p. 127-197) résulte de celle du problème de Dirichlet dans un anneau. Le calcul donne lieu à une généralisation du théorème de U. Cisotti. Dans le cas général, la solution se met sous la forme

$$\begin{aligned}\Omega(t) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(s)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t + \frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right]ds \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Psi(s)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) + \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t + \frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right]ds\end{aligned}$$

avec la condition nécessaire

$$\int_0^\pi \Phi(s)\,ds = \int_0^\pi \Psi(s)\,ds.$$

Les fonctions $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ sont déterminées par la forme des parois du solide et du canal respectivement. Le cas d'une configuration de mouvement possédant un axe de symétrie peut se traiter de diverses manières; on l'obtient notamment en particularisant la formule précédente sous la forme

$$\Omega(t) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(s)\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t\right) - \wp\,\frac{\omega_1}{\pi}s}\,ds$$

avec $\Phi(\pi - s) = -\Phi(s)$. Par exemple pour les obstacles convexes $\left[\Phi(s)\right.$ négatif et décroissant quand s varie entre o et $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ la solution, pour être valable, exige la condition nécessaire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(s)\,\frac{\wp'\,\frac{\omega_1}{\pi}s}{\wp\,\frac{\omega_1}{\pi}s - e_1}\,ds - 2\left(\eta_1 - 2\zeta\,\frac{\omega_1}{2}\right)\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leqq 0.$$

Le cas limite de l'égalité correspond aux proues convexes, les plus intéressantes évidemment pour l'application.

Un problème spécialement important est celui du mouvement d'un solide dans un fluide limité, d'un seul côté, par une paroi solide parallèle à la direction du mouvement. Le cas d'un aéroplane volant horizontalement fournit un exemple intéressant de de cette théorie. La question peut se traiter (H. Villat, *Annales*

de l'École Normale supérieure, t. **28**, 1911, p. 203-311; *C. R. Acad. Sc.*, 21 novembre 1910) au moyen de la transformation

$$f = A\left[\mathrm{p}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \omega_3\right) + \frac{e_1}{2}\right] + A\left[e_1 - \mathrm{p}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \omega_3\right)\right]\log\left[e_1 + \mathrm{p}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \omega_3\right)\right]$$

(où A est une constante négative), qui ramène à considérer l'aire d'une demi-couronne. Là encore on peut obtenir la solution générale au moyen de la formule (H. Villat, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1911, p. 353-408)

$$\Omega(t) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(s)\,\frac{\mathrm{p}'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t\right)}{\mathrm{p}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t\right) - \mathrm{p}\,\frac{\omega_1}{\pi}s}\,ds$$

qui permet d'étudier des formes de solides données à l'avance. Le cas du dièdre dont les deux lames font avec Ox des angles $\delta \pm \alpha$ correspond (H. Villat, *loc. cit.*, p. 362; *C. R. Acad. Sc.*, t. **152**, 1911, p. 304) à l'équation

$$\Omega(t) = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log t + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \frac{4\alpha\eta_1\omega_1 s_0}{\pi^3}\log t + \frac{2\alpha s_0}{\pi}$$

avec la condition

$$\delta + \alpha = \frac{2\alpha s_0}{\pi}.$$

Et le cas typique de l'aéroplane réduit schématiquement à un seul plan incliné d'un angle ε sur l'horizon correspond à la formule précédente où l'on ferait

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad s_0 = \varepsilon.$$

Le calcul de la résistance éprouvée par le solide dans son mouvement est, à cause de la signification pratique, tout spécialement important. Il comporte des difficultés particulières. Je suis parvenu à montrer (H. Villat, *C. R. Acad. Sc.*, t. **164**, 1917, p. 275; *Annales de l'École Normale supérieure*, 1918) que la

résistance directe à l'avancement était fournie par la formule

$$\mathcal{R} = -\frac{2A\omega_1^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2}{\pi^3}\left[\int_0^\pi \frac{\Phi(s)\,ds}{\wp\frac{\omega_1}{\pi}s - e_3}\right]^2$$

qui donne une valeur toujours positive et assurément non nulle pour un obstacle concave ou convexe. Dans le cas d'une lame de longueur l, qui se présente normalement au courant,

$$\frac{\mathcal{R}}{l} = \frac{\pi\left(\zeta_3\frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2}\right)}{\pi\left(\zeta_3\frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2}\right) + 2\left(\sqrt{e_1-e_3} - \sqrt{e_1-e_2}\right)}.$$

Or on peut montrer que cette expression est exactement égale à $\frac{\pi}{4+\pi}$, de sorte que, pour ce cas particulier, la résistance est la même que si le fluide était illimité. Le cas de l'aéroplane incliné d'un angle ε sur l'horizon, cas que j'ai étudié spécialement, permet de reconnaître que, suivant l'inclinaison, la résistance est plus grande ou plus petite que la valeur correspondant au même obstacle pour le fluide illimité : il y a égalité pour trois valeurs de l'inclinaison.

Un grand nombre d'autres questions d'Hydrodynamique peut être traité en partant des principes appliqués ci-dessus. J'ai indiqué les principales dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (t. 152, 1911, p. 1081) en précisant les condition moyennant lesquelles les difficultés seraient finalement réduites à un problème de Dirichlet analogue à ceux utilisés précédemment. Il suffit pour cela que, dans la configuration qu'on étudie, une représentation conforme permette de masser l'ensemble des parois solides sur deux fragments seulement de la frontière.

L'un des problèmes les plus essentiels de cette sorte a été explicitement et très élégamment développé par M. Valcovici (*Inaugural Dissertation*, p. 1-62, Göttingen, 1913). C'est le problème du jet fluide sortant d'un récipient déterminé (par exemple un jet gazeux sortant d'une buse) et se brisant sur un obstacle solide. Ce cas est spécialement important comme représentant celui qui est réalisé dans certains laboratoires aérodynamiques pour les calculs de résistance à l'avancement. On sait que

dans ces laboratoires on opère généralement, soit en tunnel indéfini des deux côtés, soit à l'aide d'un dispositif comprenant un demi-tunnel indéfini d'un côté seulement, pour guider le courant d'air qui vient ensuite rencontrer le modèle de solide à étudier. Ce dernier cas est celui des expériences de G. Eiffel. Cette sorte de phénomène a été étudiée de très près par V. Vâlcovici, qui a calculé notamment la pression totale que supporte le solide dans ces conditions; si l'on appelle Δ la largeur de la buse aux grandes distances en amont, c_1 et c_2 les largeurs des deux jets qui s'écoulent de chaque côté de l'obstacle dans des directions faisant les angles θ_1 et θ_2 avec le jet initial, on a, en supposant planes les parois de la buse,

$$\mathcal{R}_x = \frac{\Delta}{2}\left[1 + \frac{(c_1 + c_2)^2\pi^2}{\Delta^2}\right] - \pi(c_1\cos\theta_1 + c_2\cos\theta_2).$$

V. Vâlcovici a généralisé cette formule pour le cas de trois dimensions [*Einige Anwendungen des Impulssätze* (*Annali di Mat. pura ed applic.*, t. XXIII, 1914, p. 27-41)].

Par tout ce qui précède, on voit qu'en des cas nombreux et essentiels, l'introduction des surfaces de discontinuité a permis de résoudre d'importants problèmes d'Hydrodynamique, d'une façon qui élude les difficultés signalées au début de cet article, difficultés inévitables par tout autre procédé. Il était permis de croire que les solutions ainsi construites détermineraient pour chaque cas le mouvement du fluide correspondant à un solide et à une configuration donnés, et cela d'une façon *unique*. Il n'en est cependant rien, et la réalité est beaucoup plus compliquée : les équations de l'Hydrodynamique sont susceptibles d'avoir, dans certains cas, plus d'une solution de la nature indiquée. C'est un fait que j'ai mis en évidence (H. Villat, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. 31, 1914, p. 455-493, et *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, p. 442) en considérant pour fixer les idées le cas le plus typique, celui du mouvement d'un solide dans un fluide indéfini. Imaginons un solide dont le profil soit constitué par un angle se présentant au courant pointe en arrière. La méthode de T. Levi-Cività appliquée sans modifications fournit une première solution, après un choix convenable, et qu'on saura toujours effectuer, de la face de l'obstacle où l'on doit placer le

point de bipartition du courant. Cette solution est acceptable, comme on le vérifie aisément. On peut en former une deuxième en imaginant que dans le creux de dièdre, il se forme une région de fluide au repos sur lequel le fluide en mouvement glisse avec une vitesse $v(=e^{-a})$ inférieure nécessairement à la vitesse à l'infini. Cette nouvelle solution sera possible et acceptable, si l'on peut trouver trois nombres : $a(>0)$, s_0 (entre 0 et π), γ $\left(\text{entre } 0 \text{ et } \frac{2\omega_3}{i}\right)$, vérifiant les trois relations

$$\pi - 2\alpha - s_0 + a\frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0,$$

$$-2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + 2\eta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - a = 0,$$

$$i\log\frac{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$
$$+\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a\right)\left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \delta = 0,$$

les nombres α et δ étant donnés, satisfaisant à

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \quad 0 < \alpha \pm \delta < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Or la résolution des trois équations ci-dessus est en effet possible, et j'ai montré comment on pouvait construire des solutions numériques exactes du problème.

Le choix, parmi les solutions possibles d'un même problème, de la solution la meilleure ne pourra évidemment être fait qu'en apportant des considérations nouvelles, tirées de la viscosité, ou de l'étude de la stabilité. Un champ de recherches, manifestement d'une très grande difficulté, reste ouvert de ce côté.

Avant de quitter l'ordre de sujets qui fait l'objet des précédents paragraphes, nous devons signaler d'une façon toute spéciale les Mémoires de S.-G. Greenhill [*Report on the Theory of Stream-Line past a plane barrier* (London, Darling and Son, 1910); *Appendix to the Theory of Stream-Line* (London, J. Causton and Sons, 1916)], où sont notamment obtenus un très grand nombre d'exemples rentrant dans les configurations dont on a parlé. La méthode suivie comporte le même point de départ que

celle de T. Levi-Cività, mais elle en diffère par le choix du plan auxiliaire sur lequel se fait la représentation conforme du domaine mobile. Le choix utilisé par T. Levi-Cività et ses continuateurs a pour but d'obtenir des solutions générales et des théorèmes généraux relatifs à la résistance. Sir G. Greenhill emploie une représentation auxiliaire sur l'aire d'un polygone, variable selon le cas particulier étudié; cela lui permet d'obtenir des exemples, traités jusqu'au bout, d'une très grande simplicité. Beaucoup de ces exemples comportent l'introduction des fonctions elliptiques, ce qui ne saurait surprendre d'après les développements ci-dessus; l'auteur les manie dans ce travail avec la virtuosité incomparable que tous les mathématiciens lui connaissent ([1]).

Presque toutes les recherches précédemment exposées supposent d'une façon générale le fluide doué d'un potentiel de vitesses *uniforme*. Si cette condition n'est pas réalisée, et qu'on cesse d'admettre la présence de discontinuités dans le fluide, on peut néanmoins, jusqu'à un certain point, échapper au paradoxe de d'Alembert. W.-M. Kutta [*Auftriebs Kräfte in strömenden Flüssigkeiten* (*Illustrierte aeronautische Mitteilungen*, 1902, p. 133)] a donné de ce fait une démonstration précise. En 1905, N. Joukowski, dans un travail publié en russe [*Sur les tourbillons adjoints* (*Travaux de la Section physique de la Société impériale des Amis des Sciences naturelles de Moscou*, t. XIII, fasc. 2, 1905)] démontra le théorème fondamental de cette théorie : lorsqu'un courant, de vitesse V_0 à l'infini, rencontre un obstacle autour duquel il s'écoule, sans tourbillons ni frottement, de façon que la circulation le long du contour du solide ait une valeur Γ non nulle, la pression totale exercée sur le solide est égale à la circulation multipliée par la densité et par la vitesse V_0; sa direction s'obtient en faisant tourner le vecteur qui porte V_0, de

---

([1]) On consultera aussi avec intérêt : Leathem, *Conformal Transf. applied to Problems in Hydrodynamics* (*Philosophical Transact.*, 1915); Id., *On two-dimensional fields of flow* (*Philos. Magaz.*, 31, 1916); Id., *On two-dimensional fluid-motion* (*Proceed. Irish Academy*, 1918). Dans ce dernier Mémoire est retrouvé, par une méthode assez pénible, le résultat que j'ai signalé dans un Mémoire (*J. de Math.*, 1914), déjà cité plus haut, relatif à une condition de validité de la solution concernant les proues convexes dans un fluide indéfini (*cf.* cet article, 1re Partie, p. 52).

90 degrés dans le sens inverse de la circulation le long du contour. N. Joukowski, W.-M. Kutta [*loc. cit.* et *Ueber eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende, zweidimensionale Strömung* (*Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissenschaften zu Münschen*, 1910, n° 2, 58 p.), S. Tchapliguine [*De la pression exercée par un courant plan parallèle sur un corps immergé* (*Recueil mathématique de Moscou* (¹), t. XXVIII, 1910-1911, p. 121-166; en russe)] calculèrent un certain nombre d'exemples, pour des profils en particulier se rapprochant de ceux des ailes d'aéroplane. N. Joukowski [*Geometrische Untersuchungen* (*Travaux de la Sect. phys. de la Soc. impér. des Amis des Sc. natur. de Moscou*, t. XV, 1910, fasc. 1); *Ueber die Konturen des Tragflächen des Drachenflieger* (*Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, 1910, p. 283); *Sur les plans sustentateurs du type « Antoinette »* (*Bulletin de la Société impériale des Sciences naturelles de Moscou*, 1913)] réussit à déterminer les expressions analytiques des pressions exercées sur des profils d'ailes dérivés de l'arc de cercle et de la droite; l'un de ces profils représente exactement l'aile de l'aéroplane Antoinette. Dans un Mémoire ultérieur [*Détermination de la pression, etc.* (*Recueil mathématique de Moscou*, t. XXVIII, 1911, p. 195-204)], il détermine pour un de ces contours le centre de pression du courant, au moyen d'un élégant théorème.

Le principe de la méthode consiste à partir d'un mouvement cyclique connu, celui par exemple qui correspond à la fonction

$$f = \varphi + i\psi = -V_0 z - \frac{k}{z} + \frac{ik}{\pi}\log\frac{z}{a},$$

qui fournit un courant de vitesse V_0 rencontrant un cylindre circulaire de rayon a, autour duquel s'est établie une circulation $2k$; on transforme ensuite ce mouvement au moyen d'une représentation conforme

$$z = \Phi(\zeta),$$

qui se réduise, pour z infini, à

$$z = \lambda\zeta \qquad (\lambda = \text{const.}).$$

(¹) *Mathematischeskij Sbornik.*

Il est facile de voir qu'à l'infini les vitesses dans les deux courants sont proportionnelles dans le rapport $|\lambda|$, et font entre elles un angle connu; de plus, le long des contours solides qui se correspondent, la valeur de la circulation est la même. Des transformations simples, telles

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

$$\zeta = \frac{g}{a}\, z\, \frac{z+e}{z+g} \qquad (a,\ e,\ g,\ \text{réels};\ e > g;\ a^2 = eg)$$

(cette dernière due à Tchapliguine) permettent d'étudier des obstacles en forme de plaques planes ou convexes (ou concaves dans le dernier cas).

Un inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet que partiellement d'échapper au paradoxe de d'Alembert, puisqu'elle ne fournit aucune résistance *directe* au mouvement : elle ne donne qu'une composante sustentatrice. Elle n'échappe pas, en outre, généralement à la difficulté qui résulte des pressions négatives. W.-M. Kutta, dans le dernier Mémoire cité, a lui-même signalé cette difficulté sur un exemple où la pression devient égale à moins l'infini. Pour les exemples dérivés du cylindre circulaire cité plus haut, la vitesse a pour maximum, ainsi qu'on le prouve facilement, $2V_0 + \frac{|k|}{\pi a}$; elle devient donc notablement supérieure à V_0, et il est par suite difficile d'éviter les pressions négatives, et les cavitations qui physiquement en résultent. W.-M. Kutta suppose que dans la réalité, au voisinage de la région où la pression est trouvée par lui infinie, les vitesses se trouvent diminuées par l'effet du frottement, sans que pour cela les vitesses soient modifiées aux autres points du contour. Il est clair que cette explication, si c'en est une, n'est pas très satisfaisante. (Sur l'ordre de questions étudiées dans ce paragraphe, on consultera avec intérêt N. Joukowski, *Aérodynamique*, trad. S. Drzewiecki. Gauthier-Villars, 1916, Chap. VI et VII.)

Fluides pesants. — Si le fluide étudié n'est plus, comme jusqu'ici, considéré comme dénué de pesanteur, les problèmes à résoudre deviennent sensiblement plus compliqués. En effet, si l'équation indéfinie à vérifier par le potentiel ou la fonction de courant reste la même, les conditions aux limites prennent une

forme beaucoup plus malaisée à traiter. Les notations restant les mêmes que ci-dessus, on doit avoir $\psi = \text{const.}$ sur toute paroi solide et sur toute surface libre, et de plus, sur ces dernières, il faudra

$$V^2 = 2gy + \text{const.}$$

en supposant par exemple la pesanteur agissant dans le sens Oy. Il existe des solutions approchées, déjà classiques, de problèmes de cette sorte; on les trouvera dans les Traités spéciaux (par exemple Lamb, *Hydrodynamics*, 4e édition; Cambridge, 1916). En 1904, J. Weingarten (*Verhandlungen des 3. Math. Kongress*, Heidelberg, 1904, p. 409-413) détermina un élégant cas particulier nouveau. Si α est une constante entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$, la relation

$$f = \frac{2}{3}\sqrt{2g\cos\alpha}\, e^{\frac{3}{2}i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} z^{\frac{3}{2}}$$

définit le mouvement d'un fluide pesant glissant sur une paroi solide, d'équation

$$r^{\frac{3}{2}} \sin\left[\frac{3(\theta+\alpha)}{2} + \frac{3\pi}{4}\right] = \text{const.}$$

(en coordonnées polaires r, θ) et délimité au-dessus : 1° par la demi-droite $\theta = -\alpha + \frac{7\pi}{6}$ formant paroi solide; 2° par la demi-droite $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, formant surface libre. Malheureusement, dans cet exemple, la pression a l'inconvénient de devenir infinie aux grandes distances du côté des parois.

Dans le cas de l'écoulement sur une paroi courbe indéfinie, H. Blasius (*Zeitschrift Math. Phys.*, t. 58, 1910, p. 90-110; t. 59, 1911, p. 43-44) a indiqué une méthode, d'allure géométrique, qui permet de calculer des cas intéressants. Supposons que nous nous donnions la surface libre, dont l'allure générale est connue *a priori* selon le phénomène particulier qu'on étudie. Soit

$$(1) \qquad y = g(x)$$

l'équation donnée de cette surface. En choisissant convenablement les axes de coordonnées, on devra avoir le long de cette courbe

$$V^2 = 2gy = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2,$$

s désignant l'arc de la courbe. On en tire

$$(2) \qquad \frac{\varphi}{\sqrt{2g}} = \int^x g\sqrt{1+g'^2}\,dx = \int^y \sqrt{y\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}\,dy.$$

De sorte que si

$$x = p(\varphi), \qquad y = q(\varphi)$$

représente la solution des équations (1) et (2), la solution du problème d'Hydrodynamique sera réalisée par les équations

$$z = x + iy = p(f) + iq(f); \qquad f = \varphi + i\psi.$$

La résolution des équations (1), (2) est en général pratiquement impossible; mais si l'on sait écrire

$$y = g(x), \qquad \varphi = h(x),$$

alors en désignant par t une variable complexe, on aura

$$f = h(t); \qquad z = t + ig(t).$$

Une fois construites les lignes de courant du mouvement obtenu, l'une quelconque de ces lignes peut être considérée comme une paroi solide, en faisant abstraction de tout le fluide placé du côté de cette paroi où ne se trouve pas la surface libre.

J'ai introduit une autre méthode générale qui permet dans des cas étendus d'obtenir des solutions exactes pour un grand nombre de problèmes tels que l'écoulement dans un canal, ou sur un déversoir (H. Villat, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. 32, 1915, p. 177-214; *C. R. Acad. Sc.*, t. 156, p. 58). Par exemple, dans le cas d'un canal partiellement recouvert en amont, on montre qu'en supposant la pesanteur dans le sens des y négatifs, on pourra poser

$$dz = e^{i\Omega(t)}\,\frac{dt}{1-e^{-t}},$$

et le problème sera résolu par la construction de la fonction

$$\Omega(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\,\frac{\operatorname{ch}\frac{t+\alpha}{2}}{\operatorname{sh}\frac{t-\alpha}{2}}\,\frac{d\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\beta}{\operatorname{ch}\frac{\beta-t}{2}}\left[G(\beta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\beta-\alpha}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\beta-\alpha}{2}}\,\frac{d\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}\right].$$

Les deux fonctions F et G, dont la première caractérise la forme des parois solides, et dont la seconde donne la variation de la vitesse le long de la surface libre, ne doivent pas être prises arbitrairement; elles doivent satisfaire, pour X réel, à la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\alpha)\,d\alpha}{\operatorname{ch}\frac{X-\alpha}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta)\,d\beta}{\operatorname{sh}\frac{\beta-X}{2}}$$
$$- 2\pi \arcsin\left[\frac{1}{g}(1+e^{-X})e^{3G(X)}G'(X)\right] = 2\pi\mathcal{F}(X),$$

l'intégrale qui figure au second membre ayant sa valeur principale au sens de Cauchy. Cette équation, de la forme de Fredholm par rapport à F, de première espèce au sens de M. Picard, peut se résoudre directement : elle a pour solution

$$F(X) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}(X+i\pi) + \mathcal{F}(X-i\pi)].$$

De là on conclut la construction des configurations qui répondent exactement aux conditions proposées. Dans les applications, les calculs de cas particuliers peuvent être poussés jusqu'au bout.

Il est clair que des solutions approchées, vu la grande complication des solutions exactes, rendent dans la pratique des services incontestables, étant sensiblement plus maniables. Nous allons exposer un certain nombre de ce genre de solutions.

Considérons d'abord le cas de l'écoulement dans un canal à fond horizontal. Dans une étude d'une grande pénétration, T. Levi-Cività (*Atti dei Lincei*, t. 16, 1907, p. 777-790), considérant un prolongement analytique de la fonction w (les notations sont toujours les mêmes que depuis le début de cet article) au delà du fond du canal, se libère élégamment des conditions aux limites, et ramène la recherche du mouvement à la résolution de l'équation mixte, différentielle et aux différences finies,

$$\frac{d}{df}[w(f+iq)w(f-iq)] - ig\left[\frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)}\right] = 0,$$

où q désigne le débit du canal. Il faudrait trouver une fonction $w(f)$ réelle sur l'axe réel, régulière pour $|\psi| \leqq q$, finie à l'infini, et dont la partie réelle soit toujours positive. Le cas par-

ticulier du mouvement ondulatoire se ramène à l'équation

$$\xi \frac{d}{d\xi}\left[\varpi(\alpha\xi)\varpi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right] - \frac{g\omega}{2\pi}\left[\frac{1}{\varpi(\alpha\xi)} - \frac{1}{\varpi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\right] = 0$$

avec $\alpha(<1)$ et ω constants. Il faudrait trouver pour cette dernière équation une solution régulière pour $\alpha < \xi < \frac{1}{\alpha}$, réelle pour $|\xi| = 1$. En faisant $\varpi = c(1+\varepsilon)$, et en supposant ε petit du premier ordre, on peut trouver une solution approchée de cette équation, répondant aux conditions exigées; on retrouve ainsi le classique mouvement ondulatoire

$$y = \frac{q}{c} - \frac{\gamma\lambda}{2\pi}\,\mathrm{sh}\frac{2\pi q}{\lambda c}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

avec la condition

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\frac{2\pi q}{c\lambda}$$

(*cf.* Appell, *Mécanique rationnelle*, t. III, 2e édition, p. 469; Gauthier-Villars, 1909).

Si le canal est supposé très profond, l'artifice de T. Levi-Cività n'est plus applicable tel quel. U. Cisotti (*Atti R. Ist. Veneto*, t. LXX, 1910-1911, p. 33-47), en suivant les mêmes principes et faisant usage d'un artifice déjà suggéré par P. Rudzki [*Ueber eine Klasse hydrodynamische Probleme mit besonderen Grenzbedingungen* (*Math. Annalen*, t. L, 1898, p. 261-281)] trouve une solution approchée pour le mouvement ondulatoire, en introduisant l'équation

$$\frac{d\varepsilon}{df} + i\frac{g}{c^3}(\varepsilon - \mathrm{B}) = 0 \qquad (\mathrm{B} = \text{const.})$$

au moyen de laquelle il retrouve les mouvements ondulatoires déjà connus (*cf.* Appell, *loc. cit.*, p. 471); il prouve en même temps que ces mouvements sont les seuls petits mouvements ondulatoires permanents possibles dans un canal profond.

Revenons au canal de profondeur finie. En utilisant un procédé imaginé par lord Rayleigh (*Papers*, t. I, p. 256), U. Cisotti (*Atti dei Lincei*, t. XXIV, 1915, p. 503-507, 599-603) détermine des solutions approchées convenant au régime variable. La condition

à la surface libre étant

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + gy = \text{fonct. de } t,$$

posons

$$f(z, t) = \varphi + i\psi = f(x, t) + iy \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \ldots.$$

En se limitant aux deux premiers termes, on en conclut une solution fournie par l'équation

$$F\left[y, x + \left(\frac{gy^2}{q} - \frac{q}{y}\right) t\right] = 0,$$

où q représente le débit, et où F est une fonction arbitraire de deux arguments.

Les canaux à fond rectiligne, faisant un angle α non nul avec l'horizon, peuvent donner naissance à des mouvements permanents à régime rapide. U. Cisotti (*Atti dei Lincei*, t. XX, 1911, p. 633-637) a considéré de tels mouvements, pour lesquels l'équation à satisfaire à la surface est

$$V^2 - 2g(x \sin\alpha - y \cos\alpha) = \text{const.}$$

On peut encore trouver des solutions approchées, au moyen du procédé de lord Rayleigh, en posant

$$u - iv = w(x + iy) = w(x) + iy w'(x) + \ldots$$

et réduisant le développement à ses deux premiers termes. On trouve ainsi, entre les vitesses moyennes c et c_1 en deux sections du canal, distantes de l, le débit étant égal à q, la relation

$$l \sin\alpha + q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right)\cos\alpha + \frac{c^2 - c_1^2}{2g} = 0.$$

L'application de la même méthode au jet d'une cascade tombant d'un seuil horizontal a été faite par le même auteur (*Atti dei Lincei*, t. XXI, 1912, p. 97-102). Une approximation de même nature, faite en développant z en fonction de f, conduit à des mouvements où le profil inférieur du jet qui constitue la cascade, est une parabole, et le profil supérieur une courbe du cinquième

degré. L'approximation n'est satisfaisante que pour une faible épaisseur d'eau [1].

Dans un paragraphe antérieur, nous avons envisagé l'écoulement des jets issus d'un récipient muni d'un orifice. Si l'on suppose le fluide pesant, les calculs sont beaucoup moins simples. En imaginant un mouvement de révolution dans l'espace, la pesanteur agissant suivant Oz, le problème a été depuis longtemps mis en équation par Résal (*Mécanique*, t. II, p. 206; Gauthier-Villars, 1874) qui a établi un développement en série pour le potentiel et la fonction de Stokes. U. Cisotti (*Atti dei Lincei*, t. XXIII, 1914, p. 324-328) en déduit une solution approchée pour l'écoulement par un orifice circulaire, au moyen de l'équation

$$z = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right),$$

où R est le rayon de l'orifice, et c la vitesse moyenne à l'orifice. On en conclut, pour les vitesses moyennes dans le jet en deux sections distantes de h,

$$c_1^2 - c^2 = 2gh,$$

c'est-à-dire la même relation qui régit la chute des graves dans le vide. [A cette occasion, signalons les recherches suivantes : G. van den Mensbrugghe, *Sur l'élasticité développée dans les jets* (*Bulletin Acad. Belgique*, 1904, p. 401-409); *Sur la theorie des veines liquides* (*Annales Soc. scient. de Bruxelles*, t. XXVIII, 1903-1904, p. 126-128); J. Hermanek, *Theorie des freien Ausflüsses von Flüssigkeiten an Mündungen und Ueberfallen* (*Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissenschaften in Wien*, t. CXII, 1903, II *a*, p. 879-916).]

Jusqu'ici le régime de l'écoulement n'a guère été envisagé qu'en régime permanent. C'est notamment en spécifiant cette hypothèse que le théorème de Torricelli a été démontré. T. Levi-Cività (*C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913, p. 481-484) a fait voir que le principe des forces vives permettait aussi de donner de ce théorème une démonstration rigoureuse même en régime varié, si

---

[1] Dans toutes ces questions qui relèvent de l'Hydraulique, il convient de rappeler les recherches fondamentales de J. Boussinesq, qui dominent toutes ces théories.

l'on se place au début du mouvement; la formule $v^2 = 2gh$ donne alors la vitesse initiale pour chaque élément fluide à l'orifice du récipient.

Ayant ainsi la valeur initiale de la vitesse en tout point de l'orifice, il reste à déterminer sa direction, et plus généralement les vitesses initiales en tous les points du récipient. Cela revient à la recherche d'un potentiel φ vérifiant les conditions

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \qquad \text{(aux parois)},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 2gh \qquad \text{(en tout point de l'orifice)},$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{(à la surface libre)}.$$

C'est là un problème harmonique particulier, dont une élégante solution a été donnée par A. Signorini (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XLI, 1916, p. 207-237), en se limitant au cas de deux dimensions, et utilisant encore la féconde méthode de la représentation conforme. On suppose essentiellement qu'il ne se produise aucune discontinuité dans le fluide et, par suite, que le fluide au contact de la paroi ne tende en aucun point à quitter cette paroi. D'intéressantes applications sont faites de la théorie, au cas d'un récipient large et profond, percé latéralement le long d'une paroi rectiligne, et au cas d'un récipient de section rectangulaire percé au fond.

A propos des fluides pesants, il est tout à fait impossible de ne pas mentionner ici les récentes recherches de M. M. Brillouin. Malgré qu'elles ne se rattachent pas directement aux méthodes qui ont fait l'objet des études exposées dans ce qui précède, un de leurs résultats, des plus importants, concernant le calcul de la résistance qu'éprouve une carène de forme quelconque, soit en eau calme, soit dans un courant uniforme, est trop intimement lié aux recherches qui ont fait l'objet de cet article, pour que nous puissions nous dispenser de les citer.

Dans l'étude des fluides pesants avec surface libre, on sait que le potentiel des vitesses, φ, doit satisfaire, en première approximation et à la surface libre, $z = 0$, à l'équation

$$\varphi'' t^2 + g\varphi'_z = 0$$

(la pesanteur est supposée vers les z négatifs). M. Brillouin (*C. R. Acad. Sc.*, t. **163**, 1916, p. 694) a déterminé les solutions fondamentales correspondantes (sources), et généralisé au cas où le fluide est animé d'une translation horizontale U aux grandes distances, auquel cas l'équation de condition à la surface devient

$$\varphi'' t^2 + g\,\varphi'_z + \frac{1}{U}\,\varphi'_x = 0.$$

Ceci posé, l'application des procédés de calcul, extrêmement généraux, récemment découverts par M. Brillouin (*C. R. Acad. Sc.*, t. **150**, 1910, p. 461, 611; t. **161**, 1915, p. 437, 773; *Annales de Physique*, sept.-oct. 1916) permet de résoudre les ondes produites par une carène quelconque, et la résistance correspondante.

Au reste, tout ce qui concerne les recherches modernes au sujet des mouvements ondulatoires des fluides (notamment J. Boussinesq, J. Hadamard et leurs élèves) mériterait une étude à part approfondie, qui ne rentre pas dans le cadre de cet exposé [1].

Par cette revue trop rapide, on voit quels progrès essentiels ont été réalisés en certaines branches de la science des fluides. Bien des champs d'investigation restent de ce côté ouverts aux chercheurs; quelques-uns ont été signalés dans les pages qui précèdent. Souhaitons que cette étude puisse contribuer à faciliter les recherches dans ces voies assurément fécondes.

---

[1] On pourra trouver des détails sur ces questions dans A. Love, P. Appell, H. Béghin et H. Villat, *Développements concernant l'Hydrodynamique* (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. IV, 5, fasc. 2). Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1914.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JORDAN (CAMILLE). — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 3e édition, Tome III. 1 vol. gr. in-8 (23-14), 632 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

En toute autre circonstance, le *Bulletin des Sciences mathématiques* n'aurait pas tant tardé à annoncer l'apparition, en 1915, de la troisième édition du Tome III du *Cours d'Analyse* de M. Jordan. Je suis responsable de ce retard et je m'en excuse, mais j'avoue que je serais plus confus s'il s'agissait d'un de ces livres qui doivent vieillir vite, soit qu'ils traitent de sujets en évolution rapide, soit qu'ils utilisent des méthodes momentanément à la mode pour résoudre des questions arbitrairement posées.

C'est parce que son *Cours* ne vieillit pas que M. Jordan a réimprimé à peu près textuellement le Tome III. Il l'a simplement enrichi de quelques additions qu'il nous faut examiner.

Je rappelle que ce Tome est divisé en quatre Chapitres consacrés respectivement : I, aux équations différentielles ordinaires ; II, aux équations linéaires ; III, aux équations aux dérivées partielles ; IV, au calcul des variations.

Aux intégrations que contenait le Chapitre I, M. Jordan a ajouté celle des équations

$$X\,dy + Y\,dx + Z(x\,dy - y\,dx) = 0,$$
$$ay'^3 + byy'y'' + cy^2y''' = 0,$$

celles qui donnent la courbe de poursuite dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, la courbe de descente avec pression constante, la courbe élastique, le mouvement d'un projectile dans un milieu résistant. Ces deux derniers problèmes, dans lesquels l'intégration est faite au moyen de la fonction $p(u)$, servent ainsi d'application à la fois pour la théorie des équations différentielles et pour la théorie des fonctions elliptiques.

A cause des préoccupations actuelles, beaucoup de lecteurs s'intéresseront particulièrement à la détermination du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, ce qui est le problème principal et pour ainsi dire unique de la Balistique extérieure.

Mais je crois utile de rappeler qu'il n'y a rien de commun entre les calculs de Greenhill, reproduits par M. Jordan, et ceux des praticiens. La méthode de Greenhill suppose que la résistance de l'air soit de la forme bv^3; cette forme ne convient que pour des valeurs de la vitesse v comprises entre des limites trop étroites et, d'autre part, les balisticiens ont des méthodes de calcul, uniformes et très simples, pour toutes les lois de résistance de la forme bv^n; aussi n'ont-ils trouvé aucun avantage à employer l'élégante méthode proposée par Greenhill.

Dès les premiers temps de la découverte des fonctions elliptiques, les mathématiciens ont décidé qu'elles auraient des utilisations pratiques parce qu'elles conduisent à des calculs praticables et parce qu'elles généralisent analytiquement les fonctions trigonométriques si employées. Bien qu'après un siècle on en soit encore à attendre une première confirmation de cette idée *a priori*, tout le monde n'y a pas renoncé et l'on entend encore parler de temps à autre des fonctions elliptiques considérées au point de vue de leurs applications pratiques. Ceci est d'autant plus regrettable qu'on méconnaît le véritable intérêt des fonctions elliptiques et le rôle si considérable qu'elles ont joué dans le développement des mathématiques pendant tout le cours du siècle dernier, quand on s'occupe de ces fonctions seulement dans le domaine réel. Une telle façon de faire ne serait donc légitime que si l'on s'adressait à des praticiens. Or, jusqu'ici, les seules applications des fonctions elliptiques sont des applications de mathématiciens et non, ce qui est tout différent, des applications de praticiens. M. Jordan, qui s'adresse à des lecteurs mathématiciens, leur donne d'excellents exemples d'emploi des fonctions elliptiques en mathématiques.

Dans le premier Chapitre il faut aussi signaler l'emploi de la méthode des approximations successives, au lieu de la méthode de Cauchy-Lipschitz utilisée dans l'édition précédente pour la démonstration des théorèmes d'existence.

Le paragraphe IV du Chapitre III est relatif aux équations aux dérivées partielles linéaires de la Physique mathématique. Dans la deuxième édition, on y trouvait traités les problèmes de la propagation de la chaleur dans un milieu indéfini et dans une barre indéfinie dans un sens, de la propagation du son, des cordes vibrantes, du refroidissement d'une barre hétérogène et d'une sphère

homogène, de l'équilibre de température d'une sphère et d'un ellipsoïde.

M. Jordan n'essayait pas de donner de théorie générale : par des exemples bien choisis et poussés très loin, il montrait comment on avait réussi à déterminer les intégrales satisfaisant aux conditions aux limites variées imposées par le problème physique.

Dans la troisième édition, le Chapitre III a reçu deux additions importantes : l'une est la Note III consacrée aux équations de Fredholm ; l'autre, dans le texte même, est relative à la méthode de Riemann qui donne la solution du problème de Cauchy pour ler équations du type hyperbolique. Sous la forme adoptée, la méthode ne s'applique qu'aux équations à coefficients constants M. Jordan l'utilise pour étudier l'équation des télégraphistes. Cette application, qui est due à M. Émile Picard (*Bulletin de la Société mathématique* t. XXII, 1894), met bien en évidence le résidu laissé par l'onde régulière : si la perturbation occupe initialement une étendue a, il y a une onde d'étendue a qui se propage régulièrement; mais cette onde n'a pas de véritable point arrière, elle laisse derrière elle un ébranlement qui s'amortit rapidement.

Je reviendrai plus loin sur la Note III, je veux dire seulement ici qu'elle apporte les éléments de cette théorie générale des solutions déterminées par des conditions aux limites, qui manquait nécessairement dans les éditions précédentes, antérieures à la découverte de Fredholm.

Qu'il me soit permis cependant de regretter une sorte de disparité entre le Chapitre III et la Note III : dans le Chapitre, comme je l'ai dit, des problèmes physiques traités séparément sans théorie générale; dans la Note, la théorie générale des équations de Fredholm, sans une application à un problème physique particulier. Ce manque d'homogénéité entre le texte et les Notes est évidemment un inconvénient de la réimpression du texte presque sans changements; il faut reconnaître que, par contre, cette réimpression a l'avantage de conserver à l'Ouvrage sa même physionomie. Le lecteur, bien habitué à la deuxième édition comme outil journalier, se servira avec la même facilité de l'édition nouvelle.

Trois Notes importantes y ont été introduites. La première, relative aux équations aux variations, complète les résultats géné-

raux obtenus dans le texte en ce qui concerne l'existence et la nature analytique des intégrales.

Partant d'un système de deux équations différentielles du premier ordre, M. Jordan montre que si les solutions $\bar{y}$, $\bar{z}$, déterminées par les valeurs y_0, z_0 pour $x = x_0$, peuvent être prolongées jusqu'à x_1, il en est de même, pour k et l assez petits, des solutions y_{kl}, z_{kl}, déterminées par les valeurs $y_0 + k$, $z_0 + l$ pour $x = x_0$. On peut alors, dans l'intervalle (x_0, x_1), considérer les variations de $\bar{y}$ et $\bar{z}$, qui sont les dérivées partielles par rapport à k et l, pour $k = l = 0$, de y_{kl} et z_{kl}. On forme le système d'équations qui définit ces variations.

Le cas d'une équation du second ordre est ensuite examiné. Puis vient la notion importante des points conjugués : considérons la variation de y pour y' seul variable; cette variation s'annule pour $x = x_0$, tout autre zéro de cette variation est un point conjugué de x_0. Si entre x_0 et x_1 il y a un point conjugué, tout autre variation de y s'annule entre x_0 et x_1. Si de x_0 à x_1, x_1 compris, il n'y a pas de points conjugués de x_0, on peut déterminer un faisceau d'intégrales, satisfaisant à une équation $y' = u(x, y)$, telle que par tout point d'un petit domaine entourant l'intégrale considérée il passe une intégrale du faisceau et une seule.

Ces résultats vont servir dans la Note II relative au calcul des variations. Pour préparer cette Note les distinctions entre le minimum fort et le minimum faible, entre les problèmes de minimum au sens de Weierstrass et au sens de Lagrange ont été introduites dans le texte, au Chapitre IV. Dans le texte on s'occupe du problème de Lagrange, la Note est consacrée à celui de Weierstrass.

On établit tout d'abord que la recherche d'un minimum fort pour $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx$ n'est pas modifiée; que l'on s'occupe seulement des fonctions de comparaison y qui ont une dérivée continue ou aussi des fonctions dont la dérivée a un nombre fini de points de discontinuités. Cela permet de montrer qu'une fonction ne peut répondre à la question sans rendre minimum aussi l'intégrale étendue seulement à une partie quelconque de (x_0, x_1). Cette remarque sert dans l'établissement de l'équation des *extrémales* qui est obtenue en transformant la variation première non

plus, comme dans le texte, par l'intégration par partie du terme en y', mais par l'intégration du terme en y. Ceci permet de ne pas supposer *a priori* l'existence de y'' et au contraire de démontrer cette existence sous l'hypothèse

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} \neq 0.$$

La formation de l'équation aux variations pour l'équation des extrémales conduit à la considération d'une forme quadratique qui joue un rôle fondamental dans l'étude de la variation seconde.

On prouve facilement qu'il ne peut y avoir de minimum s'il existe des points conjugués entre x_0 et x_1 : c'est la *condition de Jacobi;* puis que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}$ doit être positif : c'est la *condition de Legendre*. Sous ces conditions la variation seconde est positive sauf peut-être dans le cas, laissé de côté, où x_1 serait un point conjugué.

Mais suffit-il que cette variation soit positive? En modifiant $y(x)$ au voisinage d'un point de façon à remplacer un arc de l'extrémale par deux segments rectilignes, on est conduit à la condition de Weierstrass : la fonction

$$E(x, y, y', p) = \varphi(x, y, p) - \varphi(x, y, y') - (p - y')\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$$

ne doit être négative en aucun point de l'arc considéré, pour aucune valeur de p.

L'exemple de l'intégrale $\int_0^1 (y'^2 + y'^3)\,dx$ montre que cette condition est différente des précédentes.

Choisissons un faisceau d'extrémales $y' = u(x, y)$ comprenant celle que l'on étudie. Le théorème de M. Hilbert sur l'intégrale curviligne

$$\int \left[\varphi(x, y, u) - u\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)\right] dx + \frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)\,dy$$

permet la comparaison des valeurs de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \varphi\,dx$ pour l'extrémale et pour des courbes voisines. On voit ainsi qu'il y aura un minimum fort si dans un petit domaine d, contenant l'extrémale, la fonction $E(x, y, u, p)$ n'est négative pour aucune

valeur de p ou encore si, dans d, $\frac{\partial^2 \varphi(x, y, p)}{\partial p^2}$ n'est jamais négatif, quel que soit p.

La Note III est relative aux équations de Fredholm dans lesquelles l'inconnue est une fonction d'une seule variable. Avant de donner rapidement une idée de la marche suivie par M. Jordan, je voudrais faire quelques remarques sur deux simplifications de notations qu'il a adoptées et qu'il signale aux Lecteurs : Toutes les intégrales qu'il rencontre étant prises entre les mêmes limites a et b, il supprime l'indication de ces limites; dans les fonctions de plusieurs variables, il supprime la virgule entre les variables.

La première simplification, qui serait à condamner si l'on s'adressait à des débutants, est ici parfaitement légitime; à aucun moment on n'a à penser aux limites d'intégration a et b, il est donc parfaitement inutile que la notation rappelle ces limites. C'est une simplification véritable que de supprimer ce qui n'est pas indispensable à la question.

Mais, dans la théorie, on aura nécessairement à considérer simultanément des fonctions d'une variable, la fonction inconnue par exemple; des fonctions de deux variables, le noyau par exemple; des fonctions de trois variables, la résolvante par exemple. Il faut donc que la notation nous indique clairement à chaque moment la nature des fonctions dont nous nous occupons. Pour cela il y a une notation classique, avec virgule; beaucoup de ceux qui travaillent dans la théorie des équations intégrales ont adopté une notation nouvelle, sans virgule. Que, pour la notation des déterminants de Fredholm, notation nouvelle à introduire, on adopte une notation avec virgule ou sans virgule, rien de plus légitime. A ce moment, il faut de toute nécessité apprendre une langue nouvelle, je ne vois aucun inconvénient à ce qu'on adopte la langue qui s'écrit le plus simplement, pourvu qu'elle ne prête à aucune confusion. Que, lorsqu'ils écrivent pour eux, les mathématiciens qui travaillent sur la théorie des équations intégrales emploient la notation qui leur plaît le mieux, c'est parfait. Mais je voudrais que, dans leurs publications, ils emploient la langue usitée dans toutes les autres parties des mathématiques. C'est pour moi, et je sais que je ne suis pas le seul dans ce cas, une fatigue réelle d'avoir à transposer dans la langue habituelle les travaux écrits dans la nouvelle langue.

Il n'y aurait que des avantages, et pour la Science et pour les Auteurs à rendre leurs Mémoires plus facilement lisibles [1].

L'équation de Fredholm étant écrite à la façon ordinaire, M. Jordan en développe la solution en fonction entière en λ. Une transformation de cette solution conduit à la notion de la résolvante $R(x, s, \lambda)$. On écrit les relations entre R et les différents noyaux auxquels elle correspond; ces relations sont utilisées pour montrer que la solution de l'équation de Fredholm est unique.

Vient ensuite l'expression de $R(x, s, \lambda)$ sous la forme due à Fredholm $\frac{D(x, s, \lambda)}{D(\lambda)}$; on l'obtient par un calcul de vérification. La convergence des deux séries D est déduite du théorème d'Hadamard, démontré par la méthode donnée par Wirtinger dans ce *Bulletin* (année 1907).

Tout zéro de $D(\lambda)$ est un pôle de R, on va étudier l'influence de ce pôle. Cette étude est basée sur les notions de noyaux orthogonaux et de résultants orthogonaux, dues à MM. Goursat et Brion Heywood, et sur ce théorème : *Si* F *et* G *sont deux noyaux orthogonaux*, Δ *et* Δ' *les fonctions caractéristiques correspondantes*, $\Delta\Delta'$ *est la fonction caractéristique relative à* $F + G$.

Si l'on met en évidence la partie principale F relatif à un pôle λ_1 de la résolvante R, F et $R - F$ sont deux noyaux orthogonaux. C'est cette relation d'orthogonalité qui permet de démontrer que F peut se mettre sous la forme d'une somme de résolvants orthogonaux et de la forme $\Sigma a \frac{\Phi_i(x)\Psi_k(s)}{(\lambda - \lambda_1)^{k-i+1}}$. C'est là le résultat d'une analyse que l'on doit à M. Goursat.

Cette étude est peut-être un peu délicate et un peu longue pour l'étendue totale de la Note; mais M. Jordan, fidèle à ses habitudes, a préféré à des méthodes plus rapides celle qui abordait plus franchement les difficultés et les tranchait plus complètement. Il a dû d'ailleurs lui être agréable d'avoir à exposer l'une des contributions les plus importantes d'un français à la théorie nouvelle.

La résolution de l'équation de Fredholm quand λ est un zéro de $D(\lambda)$ peut être ensuite rapidement traitée grâce aux résultats acquis.

---

[1] Notez que si vous écrivez $f(s\ t)$, au lieu de $f(s, t)$, le typographe composera $f(st)$, et c'est le typographe qui aura raison.

L'équation homogène se ramène facilement à une équation où le noyau est de la forme $\Sigma\Phi_i(x)\Psi_k(s)$; or, pour ce cas, la question est pour ainsi dire de nature algébrique et se résout sans peine.

Pour l'équation non homogène, une condition de possibilité, que l'on écrit à l'aide de la considération de l'équation associée, doit être remplie. Lorsqu'elle l'est, l'équation se résout en utilisant encore la décomposition acquise du noyau et de la résolvante.

Enfin, pour le cas des noyaux symétriques, M. Jordan démontre que $D(\lambda)$ a nécessairement des racines; ces racines, qui sont des pôles simples de la résolvante, sont toutes réelles.

H. Lebesgue.

MÉLANGES.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU MOUVEMENT DE PRÉCESSION ET DE LA DÉRIVATION DES PROJECTILES;

Par M. H. VERGNE.

1. Les projectiles oblongs lancés par les armes rayées, obus ou balles de fusils, sont animés à leur départ d'un vif mouvement de rotation autour de leur axe de révolution; cela leur assure une certaine tendance à rester couchés sur la trajectoire, l'angle que fait l'axe avec la tangente à la trajectoire restant toujours petit; en même temps il se produit un écart, connu sous le nom de *dérivation*, perpendiculairement à la direction du tir.

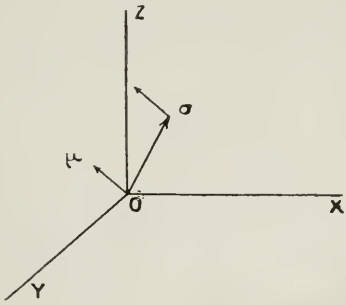
On s'accorde à voir la cause principale de ces phénomènes dans les effets gyroscopiques produits par la résistance de l'air au mouvement de translation du projectile assimilé lui-même à un gyroscope.

Je me propose d'exposer ici les résultats obtenus sur ces effets gyroscopiques, en ne faisant appel qu'aux principes les plus élémentaires de la Mécanique, et par de simples considérations géo-

métriques, sans effectuer aucun calcul. Je rappellerai, en commençant, la théorie élémentaire du gyroscope et le théorème des moments cinétiques sur lequel elle est basée.

2. Théorème des moments cinétiques. — Étant donné un système matériel en mouvement par rapport à un trièdre de référence fixe OXYZ (*fig.* 1), soient, à un instant t quelconque, $O\sigma$ le vecteur

Fig. 1.



moment cinétique (moment résultant des quantités de mouvement) par rapport au point O, et $O\mu$ le moment résultant, par rapport au même point, des forces *extérieures* au système. *La vitesse de l'extrémité σ du vecteur moment cinétique est à chaque instant égale et parallèle au moment résultant* $O\mu$.

Si l'on regarde un instant $O\mu$ comme le moment d'une force appliquée au point σ, et la flèche $O\sigma$ comme une flèche matérielle, on peut dire que l'on verra cette flèche se déplacer *perpendiculairement* à la force qui sollicite sa pointe. Un observateur qui voudrait appliquer la règle des trois doigts placerait son index dans la direction de la flèche $O\sigma$, et son pouce dans la direction de la force, il verrait alors la flèche $O\sigma$ se déplacer dans la direction de son médius [1].

Le théorème des moments cinétiques reste vrai, rappelons-le, dans le mouvement d'un système autour de son centre de gravité; il suffit de conserver le même énoncé, mais de regarder, dans la

---

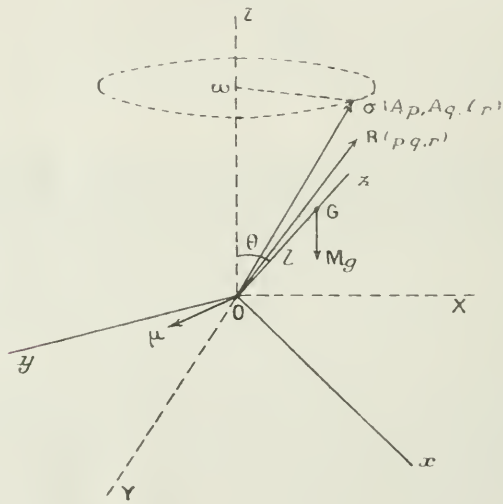
[1] Il se servirait de sa main droite ou de sa main gauche suivant le sens adopté pour les moments.

figure 1, le point O comme le centre de gravité du système, et les axes OX, OY, OZ comme trois axes de directions fixes passant par ce point.

3. Gyroscope. — Le gyroscope est un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe, et animé autour de cet axe d'une très grande vitesse de rotation propre. Nous rapporterons son mouvement à trois axes rectangulaires fixes OXYZ ayant pour origine le point fixe O, l'axe OZ étant vertical.

Soient Oz l'axe de révolution du gyroscope, xOy un plan perpendiculaire à cet axe (*fig.* 2) : Ox, Oy, Oz sont trois axes rectan-

Fig. 2.



gulaires *mobiles* invariablement liés au gyroscope. Soient A, A, C les moments d'inertie du gyroscope par rapport à ces trois axes, et appelons à chaque instant p, q, r les projections sur ces trois mêmes axes du vecteur OR qui représente la rotation instantanée du gyroscope : par hypothèse, r est *très grand*, p et q sont *finis* mais *modérés*, c'est-à-dire très petits devant r.

Il est bien connu qu'à chaque instant le vecteur moment cinétique $O\sigma$ a, pour projections sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz,

$$Ap, \quad Aq, \quad Cr,$$

et que la force vive du gyroscope a pour valeur

$$A(p^2+q^2)+Cr^2.$$

Les forces extérieures se réduisent au poids Mg du gyroscope, appliqué à son centre de gravité G [1].

Constatons tout d'abord que *r restera toujours très grand, p et q toujours modérés :* d'où il suivra que les angles zOR et $zO\sigma$ seront toujours très petits.

En effet, le vecteur $O\mu$, moment de la force Mg, est toujours perpendiculaire à Oz : donc la vitesse absolue du point σ, équipollente à $O\mu$, est constamment normale à l'axe Oz; d'ailleurs sa vitesse *d'entraînement* due à la rotation (p, q, r) est aussi normale à Oz (car les trois droites Oz, $O\sigma$, OR sont évidemment dans un même plan); donc il en est de même de sa vitesse *relative*, dont la projection sur Oz, qui est $\frac{d(Cr)}{dt}$, est par suite nulle; r reste donc constant, c'est-à-dire très grand puisqu'il l'est initialement.

Pour ce qui est de p et de q, remarquons que la variation de la force vive

$$A(p^2+q^2)+Cr^2$$

ne peut provenir que d'une variation équivalente de l'énergie potentielle, qui est $Mgl\cos\theta$, l désignant la longueur OG. Or les variations de l'énergie potentielle sont sûrement inférieures à $\pm Mgl$, elles sont donc modérées. Puisque Cr^2 est lui-même constant (et cela rigoureusement), nous concluons que $A(p^2+q^2)$ ne varie que modérément; donc p et q restent toujours modérés, c'est-à-dire très petits devant r.

Nous énonçons donc cette importante conclusion : *Les trois directions Oz, $O\sigma$, OR, qui sont au début presque confondues, resteront toujours presque confondues.*

Ainsi nous connaîtrons *très approximativement* le mouvement de l'axe Oz du gyroscope, si nous connaissons celui du moment cinétique $O\sigma$. C'est cette étude approximative qui va maintenant nous occuper.

---

[1] La réaction du point fixe O est bien une force extérieure, mais son *moment* par rapport à ce point est nul; or c'est uniquement par leur moment que les forces interviennent dans la question actuelle.

Précession. — Le poids Mg étant vertical, son moment $O\mu$ est *horizontal* et perpendiculaire au plan ZOz, par suite presque *perpendiculaire au plan* $ZO\sigma$. Or $O\mu$ représente la vitesse de l'extrémité σ du vecteur $O\sigma$, vecteur dont la longueur est d'ailleurs presque constante et voisine de Cr. Pour ces raisons, le point σ reste toujours dans un plan horizontal (rigoureusement), où il décrit très approximativement une circonférence dont le centre ω est situé sur la verticale OZ.

L'axe Oz du gyroscope, dont la direction est toujours presque confondue avec $O\sigma$, fait donc avec la verticale OZ un angle θ qui reste *presque constant* et n'éprouve que de très légères oscillations autour d'une valeur moyenne. Le vecteur $O\mu = Mgl\sin\theta$ est lui-même presque constant en grandeur; si bien que la circonférence que décrit approximativement le point σ est parcourue avec une vitesse presque uniforme $Mgl\sin\theta$. Comme on a, à très peu près,

$$O\sigma = Cr, \qquad \omega\sigma = Cr\sin\theta$$

on peut dire que la flèche $O\sigma$, considérée comme une flèche matérielle, tourne autour de la verticale OZ avec une vitesse angulaire *constante*

$$\frac{Mgl}{Cr},$$

qui est *indépendante de l'angle* θ, indépendante aussi du moment d'inertie A. Elle est proportionnelle au moment Mgl de la pesanteur, et inversement proportionnelle au moment cinétique Cr dû à la rotation propre du gyroscope.

Dans ce mouvement de *précession*, la flèche $O\sigma$ balaie un cône de révolution d'axe vertical et d'ouverture 2θ. L'axe de révolution Oz du gyroscope restant toujours presque confondu avec $O\sigma$, son principal mouvement sera cette précession, à laquelle viendra se superposer un très petit mouvement de *nutation* consistant en des oscillations très minimes et très rapides autour de $O\sigma$.

Pour connaître le sens de cette précession, on pourrait se servir de la règle des trois doigts : plaçant l'index dans la direction de l'axe Oz, et le pouce dans la direction de la force Mg, le médius indiquera la direction de la précession. Si le gyroscope ne tournait pas, la force Mg solliciterait l'axe Oz à tomber dans le plan

vertical; l'effet gyroscopique dû à la rotation propre du gyroscope, l'oblige au contraire à se déplacer *perpendiculairement* au plan vertical dans lequel il est sollicité. C'est la propriété essentielle du gyroscope.

Remarquons que rien n'a supposé l'angle θ aigu : il peut aussi bien être obtus, c'est-à-dire que le sens du mouvement précessionnel est le même pour le gyroscope suspendu (θ obtus) que pour le gyroscope supporté (θ aigu).

Mais le sens de la précession change si r change de signe, c'est-à-dire si le gyroscope tourne en sens inverse. Observons toutefois, et cette remarque nous sera utile plus tard, que si l'on change *à la fois* le signe de r et celui de la pesanteur g, rien n'est changé au mouvement de précession.

Nutation. — Bien que le mouvement conique de précession soit de beaucoup le principal mouvement de l'axe du gyroscope, et que le petit mouvement oscillatoire de nutation soit le plus souvent insensible, nous pouvons néanmoins l'étudier à peu près complètement par des considérations très simples.

Nous avons vu que les angles $zO\sigma$, zOR restent constamment très petits; nous allons montrer de plus qu'ils sont presque *constants*. Ces angles ont respectivement pour valeur

$$\frac{A\sqrt{p^2+q^2}}{Cr}, \qquad \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}.$$

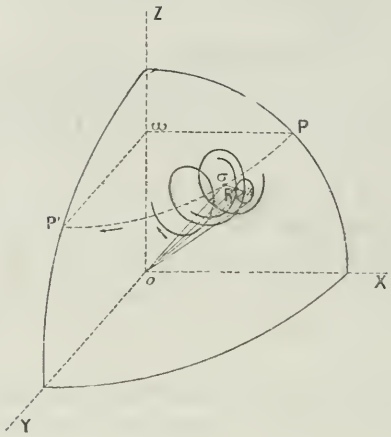
Comme r (qui est très grand) est rigoureusement constant, il suffira de constater que $\sqrt{p^2+q^2}$ (qui est, par hypothèse, *fini*) ne varie que d'une fraction infime de sa propre valeur : or c'est ce qui est évident, puisque d'après le théorème des forces vives, rappelé plus haut, les variations de $A(p^2+q^2)$ sont égales à celles de $Mgl\cos\theta$, et que l'angle θ reste presque constant.

Ainsi, on peut dire que, dans son mouvement, l'axe Oz du gyroscope fait toujours le même angle avec la flèche $O\sigma$, ou encore qu'il décrit un cône de révolution autour de cette flèche, en même temps qu'elle décrit elle-même son cône précessionnel.

Si nous considérons, sur la sphère de centre O et de rayon 1 (*fig.* 3), la trace σ de la flèche $O\sigma$, la trace R de la flèche OR, et la trace z de l'axe Oz du gyroscope, nous verrons le point σ décrire

un parallèle horizontal PP′ avec sa vitesse angulaire précession-

Fig. 3.



nelle $\frac{Mgl}{Cr}$; en même temps, nous verrons les points z et R tourner autour du point σ comme centre, en restant toujours à la même distance de ce point, les trois points σ, R, z étant toujours sur un même grand cercle.

Comme le mouvement du point z est dû à une rotation instantanée r autour de la droite OR, la vitesse absolue de ce point z, sur la sphère, sera toujours *normale* à σz (rigoureusement), et aura pour valeur

$$r.\overline{Rz} = r\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r} = \sqrt{p^2+q^2}$$

qui est *constant* (approximativement).

Le lieu du point z, où l'axe du gyroscope perce la sphère, sera donc une courbe épicycloïdale telle que celle représentée figure 3. Le point z tourne à la façon d'un satellite autour du point σ, qui tourne lui-même à la façon d'une planète autour du point ω [1].

Le lieu du point R, sur la sphère, sera évidemment une courbe

---

[1] Il faut seulement remarquer que le moyen mouvement du satellite fictif, qui est $\frac{C}{A}r$, est incomparablement plus grand que celui $\frac{Mgl}{Cr}$ de la planète fictive.

entièrement analogue, ses boucles seront seulement de dimensions un peu différentes [1].

Se plaçant au point de vue de la Cinématique classique, on peut dire qu'on obtient le mouvement du gyroscope en faisant rouler un *cône-roulette* invariablement lié au gyroscope, sur un *cône-base* fixe dans l'espace. Le cône-roulette, lieu de l'axe instantané de rotation dans le corps tournant, a pour sommet O et pour base le cercle de centre z et de rayon $zR = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}$. Le cône-base, lieu de l'axe instantané de rotation dans l'espace, a pour sommet O et pour base la courbe épicycloïdale lieu du point R.

On peut encore se représenter le mouvement comme il suit. S'il n'y avait pas de pesanteur, le moment cinétique $O\sigma$ serait absolument fixe, et l'on obtiendrait le mouvement du point z sur la sphère en faisant rouler avec une vitesse uniforme le cercle de centre z et de rayon $zR = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}$, sur le cercle fixe de centre σ et de rayon $\sigma R = \frac{A-C}{C}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}$. On reconnaît là le mouvement bien connu, dit *à la Poinsot*, pour un corps solide mobile autour d'un point fixe, et qui n'est soumis à aucune force. Poinsot appelle *polhodie* le premier de ces cercles, celui qui roule, et *herpolhodie* le second, celui qui est fixe. L'action de la pesanteur n'amène à ce mouvement à la Poinsot qu'une seule perturbation, celle de faire rouler le plan du cercle herpolhodique sur un cône de révolution d'axe vertical OZ. Ce plan, en effet, toujours perpendiculaire à $O\sigma$, enveloppe un cône supplémentaire du cône de précession.

Nous connaissons donc maintenant le mouvement du gyroscope jusque dans les détails de la nutation. Mais, répétons-le, ces oscillations nutationnelles sont en pratique extrêmement petites, et généralement tout à fait insensibles. Nous les négligerons dans la suite lorsqu'il s'agira de projectiles oblongs tournant autour de leur axe avec une très grande vitesse; nous nous rappellerons seulement que leur effet est de festonner la courbe précessionnelle de petites

---

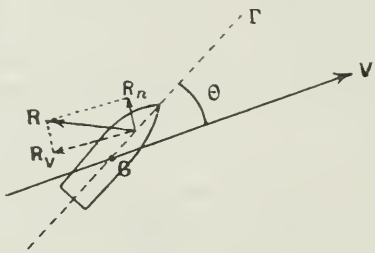
[1] La figure suppose le cas de $A > C$. Si l'on avait $A < C$, les points z et R seraient de part et d'autre du point σ; les cercles polhodique et herpolhodique, dont il va être question, seraient tangents intérieurement au lieu de l'être extérieurement.

boucles épicycloïdales. Nous confondrons donc dorénavant, sur la sphère, les points z et σ, et nous dirons que l'axe d'un gyroscope animé d'une rotation propre r et incliné sur la verticale d'un angle θ, décrit sur la sphère, dans son mouvement de précession, le parallèle de colatitude θ, avec une vitesse angulaire $\frac{Mgl}{Cr}$.

4. Projectiles oblongs. Résistance de l'air. — Avant d'appliquer les considérations précédentes au *mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité*, disons quelques mots des hypothèses que nous ferons sur la résistance que leur oppose l'air.

Soit, à un instant quelconque (*fig.* 4), GV la tangente à la trajectoire du centre de gravité G de l'obus : c'est la direction de sa vitesse V de translation. Soit GΓ son axe de révolution, faisant avec GV l'angle θ. Nous admettrons : 1° que les actions de l'air ont une résultante unique R située dans le plan ΓGV ; 2° que cette résultante R rencontre l'axe de révolution *en avant* du point G ;

Fig. 4.



3° qu'elle n'est pas parallèle à GV, mais a une petite composante R_n normale à GV et tendant à *ouvrir* l'angle θ; 4° enfin que cette résistance, ainsi que chacune de ses deux composantes, R_v et R_n, *croît* avec la vitesse V du projectile [1].

---

[1] En fait, si nous effectuons la réduction, par rapport au centre de gravité G, de toutes les actions dues à la résistance de l'air, nous obtiendrons une *force* et un *couple*. La force, passant par le point G, *n'a aucun effet sur le mouvement de l'obus autour de son centre de gravité*, et influe seulement sur la trajectoire de ce point. Quant au couple, nous pouvons projeter son moment d'une part sur GΓ, d'autre part sur le plan perpendiculaire à GΓ : la composante suivant GΓ a pour seul effet de diminuer lentement et peu à peu la vitesse de rotation propre de l'obus autour de son axe de révolution ; la composante normale à GΓ peut elle-

Dans ces conditions, l'obus, dans son mouvement autour de son centre de gravité, est soumis à un couple de renversement qui est fonction croissante de la vitesse V, fonction aussi de l'angle θ; d'ailleurs ce couple s'annule avec $\sin\theta$, donc *pour les petites valeurs de* θ, on peut le supposer proportionnel à $\sin\theta$ et le représenter par

$$F(V)\sin\theta,$$

$F(V)$ étant une fonction *croissante* de la vitesse V (bien déterminée pour un projectile donné, mais pouvant varier d'un projectile à l'autre).

Comme l'obus tourne très rapidement autour de son axe $G\Gamma$, on voit qu'il est à chaque instant, dans son mouvement autour du centre de gravité, assimilable à un gyroscope [1] soumis à un couple de renversement $F(V)\sin\theta$, au lieu du couple $Mgl\sin\theta$ qui était dû à la gravité. Seulement, ici, la direction de la verticale fictive, qui est GV, est *variable avec le temps*, et il en est de même de l'intensité de la pesanteur fictive $\frac{F(V)}{Ml}$ qui produit le couple de renversement.

Nous sommes donc amenés à étudier le mouvement d'un gyroscope *dans un champ de gravité variable en intensité et en direction*.

5. Premier cas : *La gravité est variable en intensité, mais fixe en direction*. — Revenons à la figure 2. La verticale OZ est fixe, et le mouvement de précession consiste seulement dans un mouvement angulaire de l'axe Oz (ou $O\sigma$) autour de cette verticale; *donc l'angle* θ *reste constant :* l'axe du gyroscope décrira son cône précessionnel, d'ouverture constante 2θ, avec une vitesse angulaire $\frac{Mgl}{Cr}$, qui sera maintenant variable, puisque g l'est.

A ce cas se ramène immédiatement le problème de Balistique

---

même être décomposée en deux, l'une normale au plan ΓGV, l'autre dans ce plan; tout porte à croire que la première l'emporte de beaucoup sur la seconde. Les hypothèses faites ici reviennent à négliger cette dernière.

[1] Les théorèmes des moments cinétiques et des forces vives étant encore vrais dans le mouvement autour du centre de gravité la théorie du gyroscope, qui s'appuie sur ces théorèmes, y trouvera son application.

suivant : *Un obus se déplace dans un milieu résistant, sa trajectoire* (¹) *est une ligne droite décrite avec une vitesse variable, son axe de révolution fait un petit angle* θ *avec la trajectoire* (²); *quel est le mouvement de précession?*

D'après ce que nous venons de voir, l'angle θ reste constant, le cône précessionnel est de révolution autour de la trajectoire et est décrit avec une vitesse angulaire

$$\frac{F(V)}{Cr}$$

qui est fonction croissante de la vitesse de translation de l'obus.

Si, par exemple, l'obus est lancé verticalement vers le haut, la vitesse précessionnelle ira en décroissant. Si, au contraire, l'obus est lancé verticalement vers le bas, elle ira en croissant, jusqu'à ce que la vitesse de chute V ait atteint la valeur limite que lui impose la résistance de milieu. Ce dernier cas peut présenter un intérêt pratique : on sait, en effet, que la trajectoire d'un obus dans l'air présente une asymptote verticale. Si le canon est placé à une altitude suffisante, et si l'angle de tir est assez grand, la partie ultime de la trajectoire peut arriver à se rapprocher beaucoup de cette asymptote, l'obus finissant pas tomber comme en chute libre, et l'on se trouve dans les conditions précédentes.

Remarquons enfin que, si l'obus tourne *à droite*, le mouvement de précession s'effectuera aussi *à droite :* en d'autres termes, un observateur regardant l'obus par le culot verra le mouvement de rotation propre et le mouvement de précession s'effectuer *dans le même sens*. Il suffit, pour s'en convaincre, de regarder la figure 2.

6. Deuxième cas : *La gravité reste constante en intensité, mais varie en direction.* — Nous allons définir par son *indicatrice sphérique* cette variation de la direction du champ de gravité dans lequel nous supposons placé le gyroscope.

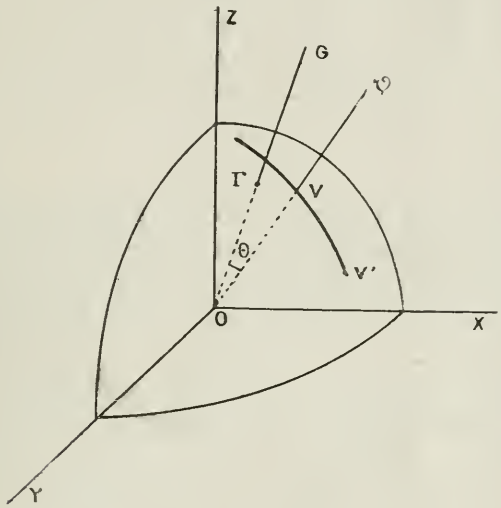
Considérons trois axes *fixes* OXYZ ayant pour origine le

(¹) Par *trajectoire* d'un obus, nous entendrons toujours la trajectoire de son centre de gravité.

(²) Dans toutes les questions de précession des projectiles, l'angle θ sera toujours supposé *petit*.

point de suspension du gyroscope (*fig.* 5), et la sphère de rayon 1 ayant ce point pour centre. A chaque instant t, la verticale instantanée O♈ a une certaine direction qui perce la sphère

Fig. 5.



en V : le lieu du point V est l'*indicatrice sphérique* de la gravité. Soit VV′ cette indicatrice.

A chaque instant t, l'axe du gyroscope OG perce la sphère en un point Γ; nous cherchons le lieu du point Γ sur la sphère.

Or, d'après ce qui précède, le mouvement précessionnel de l'axe OG s'effectue à chaque instant autour de la verticale instantanée OV avec une vitesse angulaire *constante* $\frac{Mgl}{Cr}$.

Ici, l'angle ΓOV n'est plus du tout constant; ce qui est constant, c'est la vitesse angulaire autour de l'axe instantané OV, cet axe variant à chaque instant.

On peut, pour étudier le lieu du point Γ, se placer au point de vue de la Cinématique classique, et considérer ce lieu comme engendré par le glissement d'une sphère de rayon 1 invariablement liée au point Γ sur la sphère fixe de rayon 1. Dans ce glissement de sphère sur sphère, une courbe-roulette de la sphère mobile *roule* sur une courbe-base de la sphère fixe, le point de contact étant le pôle de la rotation instantanée.

Le rôle de courbe-base est joué ici, évidemment, par l'indicatrice sphérique VV′ lieu du pôle instantané V; la courbe-roulette est une courbe sphérique invariablement liée au point Γ, et qu'il faudra déterminer dans chaque cas.

Imaginons par exemple, pour prendre un cas simple et important, que l'indicatrice VV′ soit un *grand cercle décrit d'un mouvement uniforme* par le point V. Que sera la courbe-roulette ?

Une formule connue de Cinématique nous donne

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{\omega}{v}, \tag{1}$$

où ρ et ρ' désignent les rayons de courbure géodésique de la courbe-roulette et de la courbe-base en leur point de contact V, ω la vitesse angulaire instantanée autour du pôle instantané de rotation V, et v la vitesse avec laquelle ce pôle se déplace lui-même sur la courbe-base [1].

Dans le cas actuel, la courbe-base est un grand cercle dont le rayon de courbure géodésique est infini, $\frac{1}{\rho'} = 0$. La vitesse v du point V sur ce cercle est une constante, ainsi que la vitesse angulaire de précession $\omega = \frac{Mgl}{Cr}$.

Donc la courbe-roulette, ayant son rayon de courbure géodésique constant, est un cercle.

Ainsi, *le lieu du point* Γ *sur la sphère s'obtiendra en faisant rouler un petit cercle invariablement lié à ce point sur le grand cercle* VV′. C'est une courbe épicycloïdale qui pourra présenter des points doubles, des points d'inflexion ou des points de rebroussement, suivant la position du point Γ par rapport au petit cercle roulant qui lui est invariablement lié. En particulier, si le point Γ est *sur* le petit cercle, ce qui arrive si, à un certain moment (par exemple à l'instant initial), l'axe du gyroscope

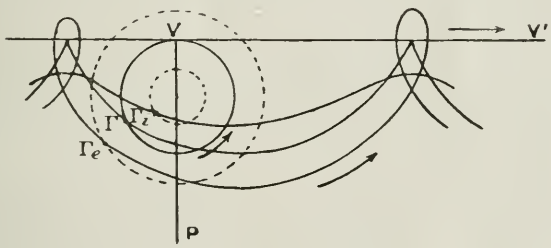
---

[1] Cette formule est bien connue, et d'ailleurs presque évidente, en Cinématique plane : ρ et ρ' désignent alors des rayons de courbure ordinaires. En Cinématique sphérique, ils désignent des rayons de courbure *géodésique*. Rappelons que le rayon de courbure géodésique en un point d'une courbe tracée sur une surface est égal au rayon de courbure ordinaire de la projection de la courbe sur le plan tangent à la surface au point considéré. Pour une courbe sphérique, il est égal à l'arête du cône circonscrit à la sphère le long du cercle osculateur en ce point.

coïncide avec la verticale instantanée, nous serons dans le cas de l'épicycloïde à rebroussements.

Jusqu'ici rien n'a supposé que l'angle θ de l'axe du gyroscope avec la verticale instantanée restait petit. Si nous supposons maintenant les conditions telles qu'il en soit ainsi $\left(\text{il faut pour cela que } \frac{v}{\omega} \text{ soit petit}\right)$, nous pourrons faire une figure plus claire que la figure 5 en développant sur un plan le cylindre circonscrit à la sphère suivant le grand cercle VV'. Dans ce développement (*fig.* 6) l'indicatrice sphérique VV' devient une droite décrite par le centre instantané V d'un mouvement uniforme; le petit cercle invariablement lié au point Γ vient se projeter suivant une circonférence (tracée en trait plein) roulant sur cette droite (*fig.* 6) en entraînant avec elle le point Γ, qui, par suite, décrit

Fig. 6.



une cycloïde. Si le point Γ est extérieur à la circonférence-roulette (point Γ_e), la cycloïde est à points doubles. S'il est sur cette circonférence (point Γ), la cycloïde est à points de rebroussement. S'il est intérieur (points Γ_i), la cycloïde et à points d'inflexion ([1]).

Si l'on désire étudier, non plus le mouvement *absolu* du point Γ (c'est-à-dire de l'axe du gyroscope), mais son mouvement *par rapport à la verticale instantanée* OV, il faudra à chaque

([1]) Dans cette figure 6, le sens de rotation propre du gyroscope est supposé inverse de ce qu'il était dans la figure 2. C'est pourquoi les flèches qui indiquent la direction de la précession sont en sens opposé. (La figure 6 est supposée regardée par un observateur extérieur à la sphère, c'est-à-dire extérieur au cylindre circonscrit qu'on a développé.)

instant, dans notre représentation plane de la figure 6, prendre comme axes de référence VV′ et sa perpendiculaire VP. Alors, rapporté à ces axes, le lieu du point Γ sera évidemment une circonférence décrite d'un mouvement uniforme. Cette circonférence coupe la droite VV′ si le point Γ est extérieur à la circonférence-roulette (point Γ_e). Elle est tangente en V à VV′ si le point Γ est sur la circonférence-roulette (elle coïncide, dans ce cas, avec la circonférence-roulette elle-même). Elle est tout entière au-dessous de VV′ si le point Γ est intérieur à la circonférence-roulette (point Γ_i).

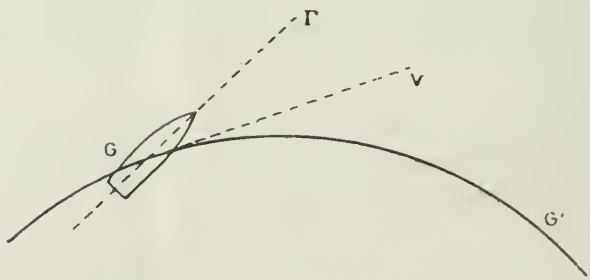
Dans les trois cas, *la majeure partie de la circonférence est au-dessous de la ligne* VV′.

Nous connaissons donc à présent, d'une façon complète, le mouvement précessionnel d'un gyroscope placé dans un champ de gravité constante en grandeur, mais dont la direction varie de façon que son indicatrice sphérique soit un grand cercle décrit d'un mouvement uniforme.

Pour avoir le mouvement complet de l'axe du gyroscope, il faudrait, à ce mouvement précessionnel, superposer, comme pour le gyroscope ordinaire, un petit mouvement nutationnel, qui est généralement insensible et que nous avons convenu de négliger.

7. Application balistique. — Au problème qui vient d'être traité, se ramène immédiatement le problème de Balistique suivant : *Un obus se déplace dans un milieu résistant, sa tra-*

Fig. 7.



jectoire est un arc de circonférence GG′ *décrit d'un mouvement uniforme (fig. 7); quel est le mouvement de précession?*

Si nous menons à chaque instant la tangente GV à la trajec-

toire, l'*indicatrice sphérique* de cette tangente (et cette fois, ce mot a son sens géométrique habituel) décrira sur la sphère de rayon 1 un arc de grand cercle VV′ d'un mouvement uniforme, et la résistance de l'air (la vitesse V du projectile étant uniforme) jouera le rôle d'une gravité fictive constante en intensité, mais de direction variable GV.

Nous sommes donc exactement ramenés au cas qui vient d'être étudié.

En particulier, si l'axe du projectile est initialement tangent à la trajectoire (c'est-à-dire si GΓ et GV coïncident), il reviendra périodiquement la tangenter, en décrivant *la totalité de son cône précessionnel à droite du plan de la trajectoire* (pour un observateur regardant l'obus par le culot et cet obus étant supposé animé d'une rotation à droite) : c'est le cas où la cycloïde de la figure 6 est à rebroussements.

Dans tous les cas, la *majeure partie* du cône précessionnel sera *à droite* du plan de la trajectoire.

Or la résistance de l'air au mouvement de l'obus n'est pas purement tangentielle : nous avons admis qu'elle possède une petite composante normale R_n (*fig.* 4), située dans le plan VGΓ, s'annulant avec l'angle VGΓ et croissant avec lui. Cette composante R_n sera donc, soit constamment, soit la majeure partie du temps, dirigée vers *la droite* du plan de la trajectoire, et son effet moyen sera celui d'une force normale au plan de la trajectoire et tendant à produire une dérivation du projectile vers la droite.

Telle est la véritable cause de la dérivation des projectiles : on voit qu'elle doit se produire à droite pour les projectiles des armes rayées à droite, à gauche pour les projectiles des armes rayées à gauche.

Dans la réalité, la trajectoire d'un obus n'est pas un arc de circonférence, et elle n'est pas décrite d'un mouvement uniforme. Mais chaque *élément* de la trajectoire (et par élément on peut sans doute entendre la portion qui correspond à un tour complet de l'axe de l'obus sur son cône précessionnel) peut être assimilé approximativement à un arc de circonférence décrit d'un mouvement à peu près uniforme.

La théorie précédente trouve donc, en gros, son application : la

direction GΓ de l'axe de l'obus tracera sur la sphère de rayon 1 une courbe épicycloïdale, cette épicycloïde se déformant peu à peu, et pouvant tour à tour acquérir des points de rebroussement, des points d'inflexion et des points doubles.

Pour résoudre le problème balistique, on procédera par approximations successives. On cherchera d'abord la trajectoire comme si l'axe de l'obus lui restait constamment tangent, la résistance de l'air étant alors purement tangentielle. On aura ainsi une trajectoire approchée, dont on se servira pour déterminer le mouvement précessionnel de l'obus autour de son centre de gravité. De ce mouvement précessionnel on déduira une valeur approchée de la dérivation, d'où une trajectoire plus approchée qui servira, s'il est nécessaire, à déterminer la précession et la dérivation d'une façon plus exacte.

Mais il convient d'étudier la chose de plus près, par assimilation avec un gyroscope placé dans un champ de gravité variable *à la fois* en intensité et en direction.

C'est ce que nous allons faire.

8. Troisième cas : *La gravité est variable à la fois en intensité et en direction.* — Nous allons encore définir la variation de direction de la gravité par l'indicatrice sphérique VV′ de la verticale instantanée (*fig.* 5) : ici cette indicatrice n'est plus un grand cercle, mais une courbe sphérique quelconque. Nous représentons toujours, à chaque instant, l'axe du gyroscope par OG, qui perce en Γ la sphère de rayon 1.

A chaque instant, le mouvement précessionnel de cet axe résulte d'une rotation autour de l'axe instantané OV, avec une vitesse angulaire

$$\omega = \frac{Mgl}{Cr},$$

qui est *variable* puisque l'intensité g n'est plus constante.

Pour étudier la trajectoire du point Γ, nous nous placerons, comme plus haut, au point de vue cinématique qui considère cette trajectoire comme engendrée sur la sphère par le roulement d'une courbe-roulette invariablement liée au point Γ sur une courbe-base fixe, qui est l'indicatrice VV′.

La formule (1), rappelée plus haut, nous donne

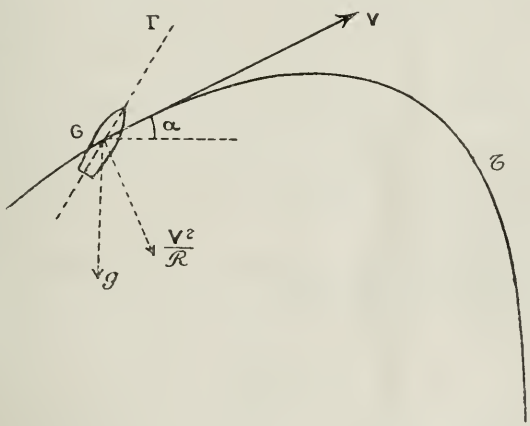
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{\omega}{v}. \tag{1}$$

Le rayon de courbure géodésique ρ' de la courbe-base VV′ est connu à chaque instant, ainsi que la vitesse angulaire instantanée de précession ω, et la vitesse v du point V sur son indicatrice (qui est la vitesse angulaire avec laquelle se déplace la verticale). La formule permet donc de calculer le rayon de courbure géodésique ρ de la courbe-roulette en fonction du temps, ou, ce qui revient au même, en fonction de l'arc (puisque l'arc de la courbe-roulette est égal à celui de la courbe-base, sur laquelle elle roule).

La courbe-roulette est donc complètement déterminée, et le problème du mouvement précessionnel de l'axe d'un gyroscope dans un champ de gravité variable en direction et en intensité est ainsi complètement résolu.

9. Application balistique. — Au problème qui vient d'être étudié se ramène immédiatement le problème de balistique suivant, qui traite de la précession d'un obus dans le cas général :

Fig. 8.



Un obus se déplace dans un milieu résistant en y décrivant une trajectoire donnée $\mathfrak{T}$, avec une vitesse V fonction donnée du temps (*fig.* 8); quel est le mouvement de précession ?

Si nous assimilons la résistance de l'air à une gravité fictive de direction et d'intensité variables, nous serons exactement ramenés au cas qui vient d'être traité. La courbe-base, sur la sphère de rayon 1, sera l'indicatrice sphérique de la tangente GV à la trajectoire, sa courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$ est connue. Pour avoir la courbure géodésique $\frac{1}{\rho}$ de la courbe-roulette, il suffira d'appliquer la formule (1), déjà rappelée, dans laquelle on donnera à ω et à v les valeurs qui leur conviennent.

ω, vitesse angulaire de précession instantanée, est égale, nous l'avons vu, à $\frac{F(V)}{Cr}$, $F(V)$ désignant une fonction *croissante* de la vitesse.

v, vitesse du point V sur son indicatrice sphérique, est égale en valeur absolue à $\frac{d\alpha}{dt}$, en appelant $d\alpha$ l'angle dont a tourné pendant l'instant dt la tangente à la trajectoire $\mathfrak{T}$; si nous appelons ds l'élément d'arc de cette trajectoire et $\mathfrak{R}$ son rayon de courbure, nous pouvons écrire

$$v = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot V.$$

Remarquons encore que, dans la pratique, la trajectoire $\mathfrak{T}$ s'éloigne très peu d'une courbe plane, que son indicatrice sphérique est par suite très voisine d'un grand cercle dont la courbure géodésique $\frac{1}{\rho'}$ est nulle; qu'au contraire le rayon de courbure géodésique ρ de la courbe-roulette, étant pratiquement toujours petit, peut être approximativement confondu avec son rayon de courbure vrai.

Bref, la formule (1) donnera, pour valeur approximative du rayon de courbure ρ de la roulette,

$$(2) \qquad \rho = \frac{\frac{V}{\mathfrak{R}}}{\frac{F(V)}{Cr}}.$$

Mais observons qu'en un point quelconque G de la trajectoire, l'accélération centripète est justement égale à $\frac{V^2}{\mathfrak{R}}$: or les forces

qui agissent sur l'obus sont uniquement la gravité g, dont la projection sur la normale principale est $g\cos\alpha$ (*fig.* 8), et la résistance de l'air qui est presque exclusivement tangentielle, sa composante normale R_n étant très petite (*fig.* 4). Nous écrivons donc

$$\frac{V^2}{\mathcal{R}} = g\cos\alpha,$$

et la formule (2) devient

$$\rho = \frac{Crg\cos\alpha}{VF(V)}. \tag{3}$$

Tel est le rayon de courbure de la roulette en fonction de l'angle α pris comme variable indépendante (la vitesse V du projectile est en effet fonction de cet angle) : or α, angle de la trajectoire avec l'horizontale, est justement égal à l'arc de l'indicatrice sphérique sur laquelle roule la roulette. On peut donc dire que la formule (3) définit la roulette par son rayon de courbure exprimé en fonction de l'arc.

Étudions les conséquences de cette formule (3).

Sur toute la partie *ascendante* de la trajectoire de l'obus, $\cos\alpha$ va en augmentant et V va en diminuant. Pour ces deux raisons, ρ va certainement en croissant. C'est dire que la roulette a une forme spiraloïde centrifuge (*fig.* 9) : cette spirale a pour

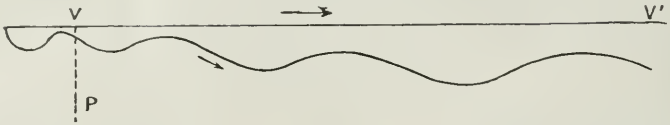
Fig. 9.

point de départ le point Γ lui-même, puisque au début du tir, au moment où l'obus quitte le canon, son axe est tangent à la trajectoire, et les deux points Γ et V de la figure sphérique coïncident (du moins, nous l'admettons).

Si, comme nous l'avons fait figure 6, nous développons sur un plan l'indicatrice sphérique VV', nous voyons qu'en faisant rouler sur la droite ainsi obtenue la roulette spiraloïde de la figure 9, le point Γ décrira une cycloïde se déformant peu à peu (*fig.* 10) : nous aurons un seul point de rebroussement au départ,

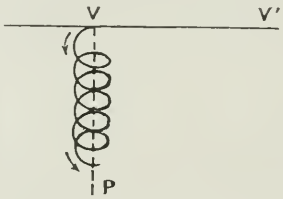
les arcs suivants sont à points d'inflexion, vont en s'allongeant et en s'éloignant de VV'.

Fig. 10.



Si l'on veut étudier, non plus le mouvement *absolu* du point Γ, mais son mouvement *par rapport à la tangente instantanée* GV *à la trajectoire*, il faudra à chaque instant, sur notre représentation plane de la figure 10, prendre comme axes de référence VV' et sa perpendiculaire VP : on verra alors (*fig.* 11) le point Γ

Fig. 11.



décrire une série de boucles presque circulaires, dont la première est tangente à VV' et qui vont en s'éloignant peu à peu du point V dans la direction VP.

Voilà ce qui se passe sur la branche ascendante de la trajectoire. Passons à la branche descendante. Au début de cette branche, $\cos\alpha$ décroît, V aussi. Nous ne pouvons donc pas dire

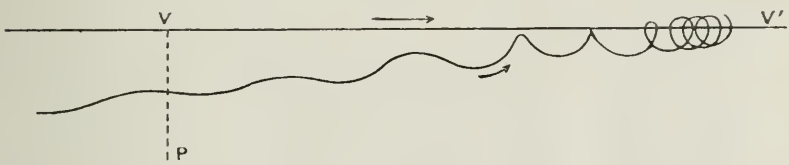
Fig. 12.

nettement dans quel sens varie ρ. Mais vers *la fin* de la trajectoire, surtout si elle est suffisamment courbe et si elle se prolonge assez vers le bas pour s'approcher de son asymptote verticale, nous pouvons affirmer que ρ diminue et tend vers zéro; en

effet $\cos\alpha$ diminue et tend vers zéro, et V au contraire recommence à augmenter par suite de la gravité ([1]). C'est dire que la roulette prend une forme spiraloïde centripète avec point asymptote, l'arc restant fini puisqu'il est toujours égal à celui de l'indicatrice sphérique (*fig.* 12).

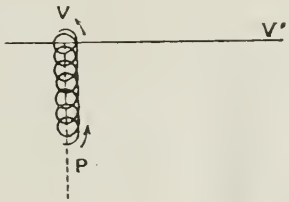
Si nous reprenons la représentation plane de la figure 10, nous verrons les arcs de la cycloïde lieu du point Γ se déformer peu à peu en sens inverse : ils se raccourciront en se rapprochant de VV′ et finiront par perdre leurs inflexions et par acquérir des points doubles (*fig.* 13). Et si l'on veut étudier, non plus le

Fig. 13.



mouvement absolu du point Γ, mais son mouvement par rapport à la tangente GV, il faudra prendre, comme nous l'avons fait figure 11, VV′ et VP comme axes de référence : on verra alors (*fig.* 14) le point Γ décrire une série de boucles presque circu-

Fig. 14.



laires se rapprochant peu à peu du point V, et finissant par l'atteindre et l'entourer.

La limite du mouvement de l'obus est un mouvement de chute libre verticale dans une atmosphère résistante (partie asymptotique de la trajectoire); il y a donc une vitesse limite. A ce

([1]) Nous ne parlons pas de la vitesse r de rotation propre du projectile, qui figure au numérateur de ρ. Elle varie sans doute assez lentement; en tout cas elle ne peut aller qu'en diminuant par suite du frottement contre l'air.

moment le point V ne bouge plus sur son indicatrice sphérique, et le point Γ finit par décrire une circonférence ayant ce point V comme centre, ainsi que nous l'avons vu au n° 5.

Nous connaissons maintenant à peu près complètement le mouvement précessionnel de l'axe d'un projectile oblong lancé par une arme rayée. Pour avoir le mouvement complet, il faudrait, à ce mouvement précessionnel, superposer le petit mouvement nutationnel dont nous avons parlé à propos du gyroscope ordinaire. Il paraît que ces oscillations nutationnelles ne sont pas toujours négligeables; cela provient probablement de ce qu'à la sortie de la bouche à feu, l'axe primitif de rotation du projectile peut ne pas coïncider avec sont axe de figure, soit par suite de vibration du canon, soit par suite de chocs accidentels et dissymétriques sur le culot. Alors les composantes p et q de la rotation instantanée (p, q, r) ne sont pas complètement négligeables, et la nutation, quoique petite, est sensible.

Quoi qu'il en soit, il résulte de la discussion précédente que, pour un obus tournant à droite, le cône précessionnel est tout entier à droite du plan vertical de la trajectoire pour la partie ascendante de cette trajectoire, et est en majeure partie à droite pour la partie descendante. La composante normale R_n de la résistance de l'air a donc une prépondérance très marquée pour provoquer une *dérivation vers la droite*.

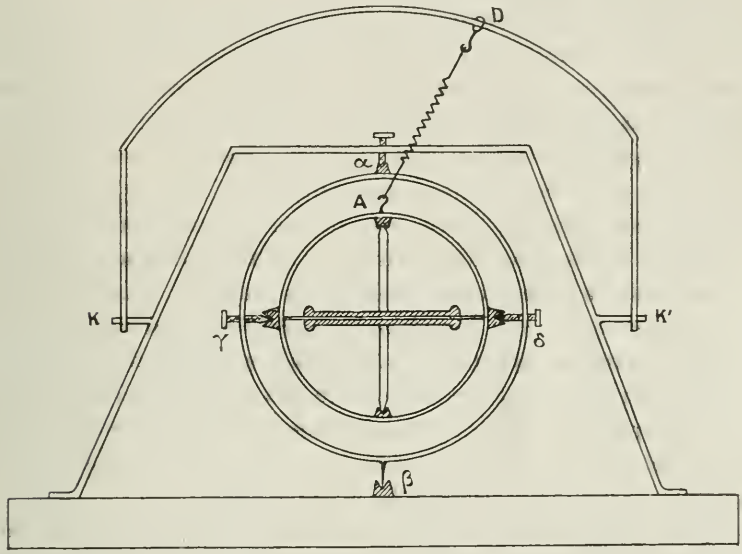
10. Appareil de démonstration. — D'après ce qui précède, on aura une image de la précession d'un projectile, et l'on pourra, en quelque sorte, l'étudier expérimentalement, si l'on réalise un gyroscope soumis à une gravité artificielle variable à volonté en intensité et en direction.

Un tel appareil est très facile à imaginer. Nous l'avons construit, mon ami M. J. Chaudesaigues et moi, au moyen d'un gyroscope de bazar.

Imaginons un tel gyroscope suspendu à la Cardan, au moyen de deux cadres $\alpha\beta\gamma\delta$ et $K\alpha K'$ (*fig.* 15) : il est librement mobile autour de son centre de gravité, c'est le *gyroscope de Foucault*. Pour le soumettre à une pesanteur artificielle variable, il suffit d'accrocher à l'extrémité A de son axe le bout d'un élastique ou d'un ressort à boudin AD dont l'autre bout D décrira sur une

sphère l'indicatrice sphérique de la pseudo-pesanteur : le couple qui produit la précession s'annule en même temps que l'angle θ de l'axe du gyroscope avec la pseudo-verticale; on peut donc

Fig. 15.



(pour les petites valeurs de θ) le regarder comme proportionnel à $\sin\theta$, exactement comme pour une vraie pesanteur.

Pour faire varier arbitrairement la *direction* de la pesanteur aatificielle, il suffit de faire déplacer l'extrémité D du ressort à boudin sur une sphère. Pour cela, ce point D peut être déplacé sur un cadre KDK′ ayant la forme d'un arc de cercle tournant à volonté autour de son diamètre KK′ comme axe; le point D peut ainsi se mouvoir sur une sphère concentrique au gyroscope, et y décrire telle indicatrice sphérique que l'on voudra.

Pour faire varier l'*intensité* de la pesanteur artificielle, on agit sur la tension du ressort à boudin, en tirant plus ou moins sur son extrémité D.

On objectera que la pesanteur artificielle ainsi créée est, en quelque sorte, négative : elle produit un couple redresseur au lieu du couple de renversement dû à la pesanteur. Mais l'objection est sans aucune valeur, puisque nous savons que changer le sens de la

pesanteur revient tout simplement à changer le sens de la précession sans changer sa grandeur; en d'autres termes, une pesanteur négative produit, sur un gyroscope tournant dans un sens, exactement la même précession qu'une pesanteur positive sur un gyroscope tournant en sens inverse.

D'ailleurs, rien n'empêcherait de faire travailler le ressort à boudin à la compression au lieu de le faire travailler à la tension. On pourrait aussi, si l'on voulait, remplacer le ressort à boudin par deux bobines d'induction placées l'une en A, l'autre en D, et dont les pôles de même nom seraient en regard; on aurait ainsi une vraie répulsion au lieu d'une attraction.

On ferait varier la gravité artificielle en augmentant ou diminuant le courant passant dans les bobines. Comme on pourrait craindre des courants de Foucault très intenses dans le rotor du gyroscope, il y aurait lieu alors d'allonger beaucoup la tige A qui prolonge l'axe du gyroscope, et où nous accrochions notre ressort, remplacé maintenant par une bobine fixée à l'extrémité de cette tige. On pourrait imaginer aussi un dispositif optique permettant de projeter sur un écran ou d'enregistrer photographiquement la trajectoire de l'extrémité de l'axe du gyroscope.

Quoi qu'il en soit, le simple ressort à boudin permet de se rendre parfaitement compte de la forme cycloïdale du mouvement précessionnel d'un projectile, mouvement que l'appareil permet de ralentir et d'exagérer autant qu'on le veut.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (Émile). — Œuvres de Charles Hermite, Tome IV. 1 vol. gr. in-8 de VI-596 pages, avec 2 planches, reproduction de la médaille du Jubilé d'Hermite et un fac-similé de lettre. Paris, Gauthier-Villars; 1917. Prix : 25 fr.

Nous terminons avec ce Volume la publication des Œuvres d'Hermite. Les travaux reproduits vont de 1880 à 1901, année de la mort d'Hermite. Nous avons continué à suivre en général l'ordre chronologique; cependant plusieurs Mémoires oubliés et quelques articles extraits de journaux scientifiques, que nous n'avions pu nous procurer jusqu'ici, ne viennent pas à leur date.

Nous avons reproduit des Notices écrites par Hermite pour rendre hommage à quelques mathématiciens, et aussi des discours prononcés dans diverses occasions. Plusieurs de ces pages sont d'un haut intérêt, non seulement au point de vue scientifique, mais parce qu'elles jettent quelque jour sur la personnalité si originale d'Hermite. Elles sont à rapprocher des lettres d'Hermite à Stieltjes publiées antérieurement, où, à côté du géomètre, apparaît souvent l'homme. On doit d'ailleurs considérer que cette correspondance, remarquable à tant de titres, fait partie des Œuvres complètes d'Hermite, comme les quatre Volumes dont nous terminons aujourd'hui la publication.

Ainsi que pour les Tomes précédents, le concours dévoué de M. Henry Bourget m'a été précieux. Je lui suis extrêmement reconnaissant du soin avec lequel il a relu tous les Mémoires, me faisant part de judicieuses réflexions qui m'ont été très utiles.

J'ai encore le devoir de rappeler l'aide que m'a apportée l'esquisse biographique et bibliographique écrite quelques semaines après la mort d'Hermite par M. Mansion, professeur à l'Université de Gand. Grâce à cette bibliographie si soignée, les omissions, s'il y en a, seront rares dans cette édition. Puisse mon souvenir atteindre le vénéré doyen de la science mathématique en Belgique dans la ville où il est retenu depuis près de trois ans.

Des portraits d'Hermite à différents âges ont été reproduits dans les trois Volumes précédents et dans les deux Tomes de la Corres-

pondance. On trouvera dans le Volume actuel une photographie de la médaille, due à Chaplain, frappée à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire. Nous donnons aussi un fac-similé de la première et de la dernière page d'une lettre adressée à Jules Tannery et imprimée dans le Tome II de ces Œuvres.

Malgré les difficultés de toutes sortes dues aux circonstances actuelles, M. Gauthier-Villars a tenu à terminer, sans plus tarder, cette publication. Qu'il reçoive mes bien vifs remerciements.

ÉMILE PICARD.

MICHEL (CH.). — COURS D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE; 1 vol. in-8° de VIII-858 pages. Paris, Félix Alcan; 1916.

Cet Ouvrage contient les matières du programme d'Algèbre et d'Analyse de la classe de Mathématiques spéciales de nos Lycées.

L'auteur développe ce programme dans le sens de la logique pure sans jamais vouloir faire appel à l'intuition; une suite de raisonnements ne lui paraît pas correcte si tous les postulats sur lesquels on s'appuie, si tous les intermédiaires n'ont pas été formellement mis en évidence : il nous annonce lui-même dans la préface de son Livre qu'il s'est attaché « à ne jamais rien admettre sans démonstration et à ne jamais accepter aucune démonstration qui ne fût parfaitement correcte et explicite ».

Au début de son Livre, M. Michel développe la théorie des nombres irrationnels. Son point de vue se rapproche de celui de M. Baire [1] : immédiatement après avoir introduit le nombre irrationnel par le partage habituel de l'ensemble des nombres rationnels en deux classes et après avoir défini l'inégalité de deux nombres quelconques, il établit, avant de définir les opérations, la notion de borne inférieure et de borne supérieure d'un ensemble de nombres : il dit alors qu'un nombre forme coupure entre deux ensembles de nombres s'il est à la fois la borne supérieure de l'un de ces ensembles et la borne inférieure de l'autre. On voit qu'il ne s'agit plus ici, comme on le fait d'habitude, d'une coupure

---

[1] BAIRE, *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité* (Paris, Vuibert et Nony, 1905); *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, t. I (Gauthier-Villars).

effectuée seulement dans l'ensemble des nombres rationnels et ceci permet de choisir, dans chaque cas, de la façon la plus commode les deux ensembles formant coupure qui définissent un nombre nouveau à partir d'autres nombres connus. Cette façon de procéder est utilisée d'une façon heureuse dans la définition et les propriétés des opérations entre nombres réels quelconques et plus loin dans la définition de l'exponentielle.

Après avoir établi ainsi d'une façon particulièrement simple et claire la notion de nombre dans toute sa généralité, l'auteur estime utile de montrer comment cette notion s'applique à la Géométrie, quels axiomes nouveaux on introduit dans la mesure des segments et dans la représentation géométrique des nombres sur une droite et, du moment qu'on adopte son point de vue de logicien, on ne peut que l'approuver de procéder ainsi. Mais était-il bien indispensable de recommencer au Chapitre III à propos du cercle ce qui avait été fait au Chapitre I en toute rigueur pour la droite, de démontrer longuement par exemple qu'il existe au moins un point du cercle trigonométrique ayant pour angle polaire un nombre algébrique donné, puis d'établir qu'un pareil point est unique? L'axiome de continuité et l'axiome d'Archimède, posés pour les points d'une droite, ne seraient-ils plus valables pour les points d'un cercle? Sans doute, les axiomes nouveaux ainsi introduits pour le cercle sont des axiomes surabondants qu'on peut déduire, ainsi que le fait l'auteur, des axiomes analogues posés pour la droite; mais je ne sais pas trop si la nécessité de la démonstration s'imposera sans un grand effort à l'esprit de la plupart des lecteurs. « Il ne suffit pas, dit Poincaré, de douter de tout; il faut savoir pourquoi l'on doute. »

Toutes les notions géométriques qu'on admet sans démonstration suffisante dans une première étude sont ainsi reprises par M. Michel à la lueur des théories générales de l'Analyse. Parfois, le lecteur sera étonné de voir jusqu'à quel point s'étendent les scrupules de l'auteur en matière de rigueur. Par exemple les mots *parallèles et de même sens*, ou *parallèles et de sens contraires*, appliqués à deux demi-droites du plan, ne paraissent pas suffisamment clairs à M. Michel et une analyse très serrée, qui occupe plusieurs pages, lui paraît nécessaire pour éclairer la notion d'orientation d'une droite, ou d'orientation d'un

plan; bien entendu il ne fait pas appel dans cette analyse à la notion de mouvement, qui fournirait une définition immédiate de deux systèmes d'axes rectangulaires de même origine et de même orientation. On touche là aux principes mêmes de la Géométrie et l'on peut se demander si de pareilles discussions sont bien à leur place dans un Traité d'Algèbre, où les représentations géométriques ne jouent que le rôle accessoire d'une concession faite par le logicien à l'intuitif. D'autre part, est-il possible de traiter des questions touchant aux principes de la Géométrie sans examiner *tous* ces principes pris dans leur ensemble? Je lis par exemple, à la page 40, la phrase suivante : « Soient deux demi-droites situées sur deux droites parallèles. Nous dirons qu'elles sont *de même sens* si elles sont d'un même côté de la droite qui joint leurs origines, *de sens contraires* si elles sont de part et d'autre de la droite qui joint leurs origines. » Sous cette forme, l'Analyse de l'auteur paraît incomplète, car le sens des locutions « d'un même côté », ou « de part et d'autre », qui figurent dans la définition précédente ne paraît pas plus clair que celui des locutions qu'il s'agissait de définir; et, si l'on veut aller plus loin dans le sens de la rigueur, on touche à l'étude des axiomes de situation qu'on ne peut songer à aborder avec des élèves de Mathématiques spéciales.

Les réflexions mêmes que m'inspirent ces premiers Chapitres du Livre montrent avec quelle conscience et quel souci de la rigueur M. Michel développe son cours d'Algèbre et d'Analyse. Ces qualités se retrouvent dans toutes les parties classiques du cours, dans les questions où tout le monde est d'accord pour désirer qu'on aille au fond des choses. Pour ne citer que quelques questions, l'étude des polynomes, en particulier des conditions d'identité de deux polynomes, des fonctions symétriques, des développements limités de Mac-Laurin, de l'application de ces développements au calcul des limites de fonctions se présentant sous une forme indéterminée, ne me paraissent rien laisser à désirer sous le rapport de la clarté et sous celui de la rigueur.

L'auteur explique dans la préface les raisons qui l'ont amené à s'écarter de l'ordre traditionnel; le plan qu'il a adopté paraît d'ailleurs ne présenter aucun inconvénient, sauf, à mon avis, en ce qui concerne l'étude des séries, étudiées seulement à la fin du cours. Il semblerait naturel de rapprocher l'étude des séries

numériques de celle des suites qui se trouve placée au Chapitre I; l'étude d'une suite, et celle d'une série, au point de vue de la convergence, sont deux questions qui se ramènent, comme on sait, l'une à l'autre; les critères de convergence des séries fournissent des critères de convergence pour les suites, puisque la suite des nombres u_n est convergente ou divergente en même temps que la série $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$; les deux questions semblent donc devoir être traitées en même temps. En outre, il me semble qu'en rejetant l'étude des séries numériques, et aussi des séries entières, à la fin du Livre, on tarde un peu trop à mettre entre les mains des élèves l'un des instruments fondamentaux de l'Analyse, on risque d'en diminuer l'importance à leurs yeux, et l'on se prive d'en faire des applications qui se présenteraient d'elles-mêmes en grand nombre dans le reste du cours. Il est vrai que M. Michel fait jouer le rôle essentiel, non pas aux séries entières, mais aux développements limités de Mac-Laurin arrêtés à un terme complémentaire : ce sont ces développements qui servent dans l'étude des infiniment petits, des infiniment grands et des formes indéterminées; mais en fait l'élève, au bout de quelque temps, sera conduit fatalement dans les questions de ce genre à supprimer les εx^n qui encombrent la pensée et compliquent l'écriture et alors je n'aperçois plus quel intérêt il y a à cacher au lecteur jusqu'à l'avant-dernier Chapitre que ces développements limités sont les premiers termes de ce que l'on appelle une *série entière;* si l'élève poursuit ses études mathématiques, il verra bien d'ailleurs que ce sont les séries entières et non pas les développements limités qui permettent de définir des transcendantes nouvelles et d'étendre le champ de l'Analyse.

Signalons, pour terminer, la belle collection d'exercices proposés que l'on trouvera à la fin des divers Chapitres et à la fin du Livre. Les énoncés, toujours intéressants et instructifs, sont le fruit d'une vaste érudition et d'un choix fait avec discernement dans un grand nombre de Mémoires; ils sont rédigés de façon à guider le lecteur tout en lui laissant le plaisir de la recherche et ce n'est pas là le moindre mérite d'un Ouvrage qui sera consulté avec fruit par les professeurs et les élèves.

S. Lattès.

MÉLANGES.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU MOUVEMENT DE PRÉCESSION ET DE LA DÉRIVATION DES PROJECTILES;

PAR M. H. VERGNE.

(*Suite et fin.*)

II. MOUVEMENTS PRÉCESSIONNELS DE L'AXE D'UN CORPS CÉLESTE. — Le mouvement d'un corps céleste autour de son centre de gravité offre une si grande analogie (pour ne pas dire identité) avec les questions que nous venons de traiter, qu'il ne sera pas sans intérêt de l'étudier ici, en nous plaçant toujours au même point de vue élémentaire.

Les corps célestes, planètes et satellites, sont animés d'un mouvement de rotation relativement rapide autour d'un axe très voisin de leur axe de révolution.

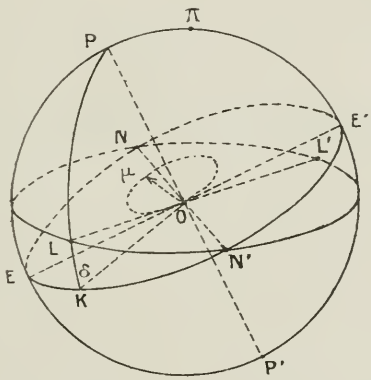
Si chacun de ces corps n'était pas influencé par les autres, son mouvement serait un mouvement *à la Poinsot*, dans lequel l'axe de révolution $O\sigma$ et l'axe instantané de rotation OR tourneraient ensemble d'un mouvement uniforme autour de l'axe *absolument fixe* $O\sigma$ du moment cinétique, ainsi qu'il a été expliqué à la fin du n° 3. Il en résulterait, comme seule variation, une petite *variation des latitudes*, ayant pour période le temps que met la circonférence polhodique à rouler d'un tour complet sur l'herpolhodie. Cette petite variation périodique des latitudes est connue pour la Terre : son amplitude ne dépasse pas une demi-seconde d'arc, et sa période *théorique* est de 305 jours (période d'Euler) (¹). Cette petite variation correspond exactement au mouvement que nous avons, pour le gyroscope, étudié sous le nom de *nutation*.

Mais chaque astre est soumis à l'action perturbatrice des autres,

(¹) Le cercle polhodique a un rayon d'une demi-seconde d'arc environ; le cercle herpolhodique sur lequel il roule, en lui étant tangent *intérieurement*, a un rayon 300 fois plus petit : ces deux rayons sont, en effet, dans le rapport $\frac{C-A}{C} = \frac{1}{300}$ environ.

la Terre en particulier subit l'influence de la Lune et du Soleil; cette influence se traduit à chaque instant par un petit *couple* perturbateur, agissant sur le corps céleste en rotation exactement comme le couple dû à une gravité variable agit sur un gyroscope. Il en résulte que l'axe $O\sigma$ du moment cinétique, axe autour duquel s'effectue le mouvement à la Poinsot et qu'on peut appeler en quelque sorte l'*axe polaire moyen* de l'astre, n'a plus une direction absolument fixe dans l'espace, mais subit des perturbations séculaires et périodiques que nous allons étudier. Ces perturbations, tant séculaires que périodiques, correspondent exactement au mouvement que, pour le gyroscope, nous avons étudié sous le

Fig. 16.



nom de *précession*. La *précession*, en effet, est un mouvement de l'axe $O\sigma$ du moment cinétique; la *nutation* n'est qu'un très petit mouvement uniforme de l'axe instantané de rotation et de l'axe de révolution autour de $O\sigma$. Pour la Terre, ce petit mouvement nutationnel correspond uniquement, comme nous venons de le dire, à la petite variation des latitudes et à la période d'Euler. Nous n'en parlerons plus dans ce qui va suivre. Nous n'étudierons que les mouvements précessionnels de l'axe $O\sigma$, que nous appellerons *ligne des pôles*, étant entendu qu'il s'agit de ligne *moyenne* des pôles. Quelques-uns de ces mouvements précessionnels sont à période relativement courte, et les astronomes leur ont donné le nom de *nutations* : mais il ne faut pas perdre de vue qu'étant des mouvements de l'axe $O\sigma$ lui-même, et non des mouvements de $O\sigma$

autour de $O\sigma$, ils sont, au sens de la théorie du gyroscope rappelée plus haut, de véritables *précessions*.

Prenant comme exemple la Terre, nous étudierons le mouvement de sa ligne des pôles sous l'action perturbatrice de la Lune et du Soleil, dont nous considérerons séparément les effets.

Soient, sur la sphère céleste (*fig.* 16), PP′ la ligne des pôles de la Terre et EE′ l'équateur. Soient LL′ l'orbite de l'astre perturbateur, la Lune par exemple, H le pôle de cette orbite, NN′ la ligne des nœuds.

Lorsque la Lune est en L, sa déclinaison est $KL = \delta$ et sa distance polaire est $\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$. Si D désigne sa distance à la Terre, le couple perturbateur, cela est bien connu et se démontre aisément [1], a pour valeur

$$3L(C - A)\left|\frac{\sin\delta\cos\delta}{D^3}\right|,$$

A et C désignant les moments d'inertie de la Terre, et L la masse de la Lune (celle de la Terre étant prise pour unité).

L'axe $O\mu$ du moment de ce couple est toujours *dans le plan de l'équateur et perpendiculaire à* OK. Donc, à l'instant considéré, ce couple produit, sur la ligne des pôles PP′, exactement le même effet que produirait sur l'axe d'un gyroscope une gravité

---

[1] Il suffit de calculer le potentiel $U = L\int\frac{dm}{r}$ exercé par la masse L de la Lune sur tous les éléments de masse dm de la Terre, lorsque sa distance géocentrique est D et sa distance polaire $\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$. On trouve (en négligeant le cube de la parallaxe lunaire)

$$U = \frac{L}{D} + \frac{L}{2}(C - A)\frac{3\sin^2\delta - 1}{D^3};$$

le couple perturbateur a pour valeur $\left|\frac{\partial U}{\partial\delta}\right|$. Le vecteur $O\mu$ qui représente son moment est perpendiculaire au plan méridien POL de la Lune; il a le même sens quand la Lune occupe deux positions L et L′ diamétralement opposées sur son orbite, il aurait aussi la même grandeur si la distance D n'avait pas varié; le lieu de l'extrémité μ de ce vecteur serait, dans le plan de l'équateur, une courbe grossièrement circulaire, tangente en O à la perpendiculaire EE′ à la ligne des nœuds, et le point μ fait deux tours sur cette courbe quand la Lune en fait un sur son orbite. Le couple s'annule quand la Lune traverse l'équateur en N et N′, et est maximum quand la Lune atteint sa plus grande déclinaison boréale ou australe.

fictive ayant pour verticale OK, et pour moment agissant sur ce gyroscope

$$Mgl = 3L(C - A)\left|\frac{\sin\delta\cos\delta}{D^3}\right|.$$

Si nous supposons que notre gyroscope fictif a une masse M égale à celle de la Terre (masse-unité), et que la distance $l = OG$ de son point fixe à son centre de gravité est aussi égale à l'unité, nous pourrons dire que

$$g = 3L(C - A)\left|\frac{\sin\delta\cos\delta}{D^3}\right|$$

représente l'intensité *variable* de la pesanteur dont la direction *variable* a pour verticale OK, et *pour indicatrice sphérique l'équateur* EE'.

Nous sommes donc ramenés une fois de plus à étudier le mouvement d'un gyroscope dans un champ de gravité variable en intensité et en direction. Le vecteur représentatif de cette gravité tournera *dans le plan de l'équateur* en ayant toujours sa direction opposée à OK : *sa grandeur et sa direction sont des fonctions périodiques du temps* puisque, quand la Lune est revenue en L après un tour complet sur son orbite, les conditions sont redevenues les mêmes.

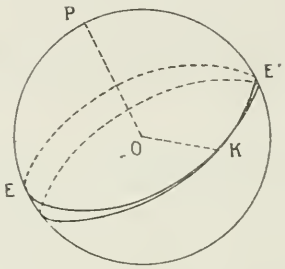
Or on sait que, quand un vecteur tourne dans un plan en ayant sa grandeur et sa direction fonctions périodiques du temps, on peut toujours le considérer comme la résultante d'une série de vecteurs *constants en grandeur* et tournant uniformément dans ce plan : les périodes de rotation de ces différents vecteurs composants sont la période du vecteur étudié et ses sous-multiples. A ces vecteurs tournants il convient d'ajouter un vecteur *fixe* représentant la moyenne du vecteur étudié ainsi décomposé.

Dans le cas actuel, le vecteur fixe produira les perturbations *séculaires*, les vecteurs tournants produiront les perturbations *périodiques*.

Chacune de ces perturbations périodiques pourra être étudiée indépendamment des autres : elle est due à une gravité constante en grandeur, mais dont la direction a pour indicatrice sphérique un grand cercle (l'équateur) décrit d'un mouvement uniforme. Le mouvement qui en résulte pour le pôle P pourra être obtenu, nous l'avons vu au n° 6, en faisant rouler sur l'équateur fixe un

cercle invariablement lié au point P. Seulement, ici, la vitesse de rotation instantanée (appelée ω au n° 6) est excessivement petite, comparée à la vitesse (appelée c au n° 6) avec laquelle tourne la gravité fictive (et qui est ici un multiple du moyen mouvement de la Lune) : il en résulte, si l'on se reporte à la formule (1), que le cercle roulant a presque le même rayon de courbure que le grand cercle de l'équateur sur lequel il roule (*fig.* 17). Dans ces condi-

Fig. 17.



tions, le pôle P est presque le pôle de la calotte limitée par le cercle roulant, et ce mouvement de roulement lui fait simplement *décrire, autour de sa position moyenne, une très petite circonférence avec une vitesse angulaire qui est la même que celle de la gravité fictive envisagée.*

On voit donc combien est simple, si on l'envisage séparément, chaque perturbation périodique de la ligne des pôles, puisqu'elle se réduit à un petit mouvement circulaire uniforme.

La seule opération à effectuer est la décomposition du vecteur tournant dont la grandeur et la direction sont fonctions périodiques du temps, en une série de vecteurs *constants en grandeur et tournant uniformément dans le plan de l'équateur*. Une telle décomposition est bien connue, en Électricité, dans l'étude des « champs tournants ». Elle est aussi tout à fait analogue à la manière dont Laplace décompose, dans la théorie des marées, l'onde totale de la marée en une série d'ondes partielles élémentaires dues chacune à un astre fictif parcourant, *dans le plan de l'équateur*, une orbite circulaire avec une vitesse angulaire constante.

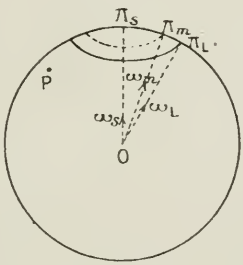
Nous n'effectuerons pas ici cette décomposition. Contentons-

nous de signaler que la principale de ces perturbations périodiques a une période *moitié* de la période de révolution de l'astre troublant : elle consiste en une « nutation » (au sens des astronomes) semi-mensuelle pour la perturbation lunaire, semi-annuelle pour la perturbation solaire [1].

Il nous reste maintenant à parler des perturbations *séculaires*, qui sont de beaucoup les plus importantes puisque leurs effets se cumulent.

Ces perturbations séculaires sont dues, nous l'avons dit, au vecteur *fixe* qui représente la moyenne de la gravité fictive tournante. Ce vecteur fixe moyen a pour direction EE′ perpendiculaire à la ligne des nœuds. Le moment $O\mu$ qui lui correspond a donc pour direction ON celle même de la ligne des nœuds. Or ce moment $O\mu$

Fig. 18.



indique précisément le sens du déplacement précessionnel du point P : ce déplacement est à chaque instant normal à l'arc ΠP, et parallèle au plan de l'orbite lunaire. Si donc nous considérons l'orbite lunaire comme fixe, nous verrons le pôle terrestre P décrire un cercle précessionnel avec une vitesse angulaire constante ω autour du pôle Π de l'orbite lunaire.

---

[1] Remarquons que, dans cette décomposition, certains vecteurs tourneront dans le sens direct (de l'Ouest à l'Est) et produiront pour le pôle un mouvement en sens direct : d'autres tourneront en sens rétrograde (de l'Est à l'Ouest) et produiront pour le pôle un mouvement rétrograde. Il arrivera qu'un vecteur direct et un vecteur rétrograde tourneront avec la *même* période : les deux mouvements circulaires de sens inverse qui en résultent pour le pôle se composeront alors en un mouvement elliptique ayant cette période. C'est ainsi que la « nutation semi-mensuelle », ainsi que la « nutation semi-annuelle », fait décrire au pôle une petite ellipse : comme ordre de grandeur, l'amplitude de ces nutations atteint respectivement $\frac{1}{5}$ de seconde et une seconde d'arc environ, en latitude ; en longitude elle est un peu plus grande.

Telle est la perturbation séculaire due à la Lune. Mais il y en a aussi une due au Soleil : elle consiste en un pareil mouvement précessionnel du pôle terrestre P autour du pôle de l'écliptique.

Pour avoir le mouvement séculaire complet du pôle P, il nous faut composer ces deux précessions lunaire et solaire. Soient (*fig.* 18) Π_S le pôle de l'écliptique, Π_L le pôle de l'orbite lunaire, P le pôle terrestre. La précession lunaire consiste en une rotation ω_L autour de $O\Pi_L$; la précession solaire consiste en une rotation ω_S autour de $O\Pi_S$. Ces deux rotations se composent en une seule ω_m autour d'un axe moyen $O\Pi_m$ (¹).

Si les points Π étaient fixes, nous verrions le point P décrire un petit cercle autour de Π_m comme pôle. Or le pôle Π_S de l'écliptique peut bien être regardé comme fixe, mais il n'en est pas de même du pôle Π_L de l'orbite lunaire. Une perturbation connue sous le nom de *rétrogradation des nœuds* lui fait décrire autour du point Π_S un petit cercle de 5° de rayon en une période de $18\frac{1}{2}$ ans environ. Le point Π_m, par suite, tourne aussi autour de Π_S dans le même temps.

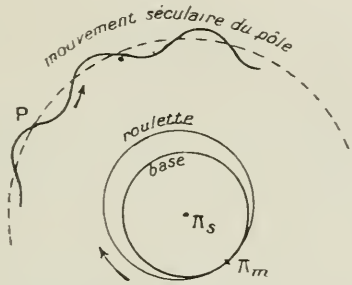
Le mouvement séculaire complet du pôle terrestre P est donc un mouvement épicycloïdal résultant d'une rotation autour du pôle Π_m, qui tourne lui-même autour du point fixe Π_S. Dans ce mouvement épicycloïdal, le rôle de courbe-base est joué par le petit cercle lieu du pôle instantané de rotation Π_m; celui de courbe-roulette invariablement liée au point P est joué par un petit cercle dont le rayon de courbure géodésique, toujours donné par la formule (1) du n° 6, diffère à peine de celui de la courbe-base, car la vitesse angulaire ω_m est excessivement petite à côté de la vitesse v du point Π_m sur son petit cercle. Le cercle-roulette roule donc sur un cercle-base qui a un rayon à peine plus petit que lui, en le tangentant *intérieurement*, le point de contact Π_m faisant un tour en $18\frac{1}{2}$ ans (²).

(¹) Comme il se trouve que ω_L est à peu près deux fois plus grand que ω_S, le point Π_m est plus rapproché de Π_L que de Π_S.

(²) En toute rigueur, la courbe-roulette ni la courbe-base ne sont des circonférences, car ω_m n'est pas tout à fait constant, pas plus que la distance $\Pi_L\Pi_m$. En effet, ω_L dépend de la distance angulaire $P\Pi_L$ (inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur) qui varie par suite du mouvement circulaire de Π_L. Pour tenir compte de ces variations, on pourrait suivre une méthode analogue à celle déjà employée, en décomposant à chaque instant la rotation ω_L en deux vecteurs, l'un

Nous verrons alors (*fig.* 19) le pôle terrestre P décrire, en gros, un petit cercle autour de Π_s : il le parcourra, dans le sens rétrograde, en 26000 ans environ : c'est le mouvement connu sous le nom de *précession des équinoxes*. Ce petit cercle précessionnel

Fig. 19.



a un rayon de 23°28′ (inclinaison de l'écliptique). Il est festonné par des ondulations dues à ce que le point Π_m tourne autour de Π_s : ces ondulations, dont la période ($18\frac{1}{2}$ ans) est celle de la rétrogradation des nœuds et dont l'amplitude est de 18″ environ en latitude, constituent le mouvement appelé *grande nutation de Bradley*.

Nous connaissons maintenant, d'une manière à peu près complète, tous les mouvements, tant séculaires que périodiques, du pôle terrestre sur la sphère céleste. De même que pour les mouvements précessionnels d'un projectile oblong, nous avons pu, les étudier, pour ainsi dire, sans aucun calcul.

---

suivant OP qui ne donnerait aucun mouvement du pôle, l'autre suivant l'équateur. Ce vecteur tournant équatorial, on le décomposerait lui-même en un vecteur fixe, donnant une précession purement séculaire s'ajoutant à la précession solaire pour donner la *précession des équinoxes*, et en vecteurs d'intensité constante et tournant uniformément dans le plan de l'équateur : le principal de ces vecteurs tournants équatoriaux donnerait la *nutation de Bradley*.

SUR LA NOTION DE VOISINAGE DANS LES ENSEMBLES ABSTRAITS;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

INTRODUCTION.

I. Le but de cette Note est double : d'une part essayer de dégager de la notion intuitive de voisinage ce qu'elle a de réellement essentiel ; d'autre part montrer que les définitions descriptives des classes ($\mathcal{L}$) employées dans ma Thèse et des classes plus générales considérées par M. F. Riesz (dans une Communication au Congrès international des Mathématiciens de Rome) peuvent rentrer comme cas particuliers dans une définition constructive où l'on utilise cette notion de voisinage. Comme application, le théorème de Borel est généralisé une nouvelle fois.

II. Je rappellerai d'abord (en petits caractères) ce que sont ces cas particuliers.

On appelle *classe* ($\mathcal{L}$) une classe d'éléments, *de nature quelconque*, dans laquelle une définition de la limite a été donnée, de sorte que pour chaque suite infinie dénombrable d'éléments de la classe $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$: ou bien cette suite est divergente, ou bien cette suite est convergente et tend vers un élément déterminé. La définition de la limite n'est d'ailleurs assujettie qu'aux deux conditions suivantes :

Si les éléments de la suite sont identiques à un certain élément A, la suite est convergente et tend vers A.

Si une suite d'éléments $A_1, A_2, \ldots$ tend vers A, toute suite infinie extraite de celle-ci tend aussi vers A.

On dira alors qu'un élément A d'une classe ($\mathcal{L}$) est élément-limite (il vaudrait peut-être mieux dire élément d'accumulation) d'un ensemble E d'éléments de cette classe si l'on peut extraire de E une suite infinie dénombrable d'éléments distincts qui converge vers A.

III. Si l'on cherche à étendre aux ensembles abstraits le plus grand nombre possible de propriétés des ensembles linéaires, la définition des classes ($\mathcal{L}$) est trop générale et j'ai été conduit à la faire suivre dans ma Thèse des définitions de plus en plus restric-

tives, employant en particulier une première définition du voisinage. J'ai donné plus tard une seconde définition plus générale du voisinage, dans les *Transactions of the American Math. Soc.*, 1918, p. 53-65, dans le but de faciliter l'analyse des éléments de la notion de distance. La définition du voisinage présentée plus loin dans un but différent est une généralisation de cette seconde.

Mais, si au contraire on cherche à embrasser dans une même définition le plus grand nombre possible des définitions de la limite données dans les ensembles de nature déterminée, la définition des classes ($\mathcal{L}$) est insuffisamment générale. Elle ne couvre pas certains cas intéressants comme par exemple celui des suites bien ordonnées où la limite est définie au moyen des « segments ».

IV. Pour obvier à cet inconvénient, M. Janizewski a proposé dans sa Thèse d'admettre que les suites convergentes peuvent avoir des types d'ordre plus élevés que le type d'ordre de la suite des nombres entiers.

M. F. Riesz se place à un point de vue encore plus général et décrit les classes que je propose d'appeler *classes* ($\mathcal{R}$). Leur conception est fort intéressante et peut être très utile.

On appelle *classe* ($\mathcal{R}$) une classe d'éléments, de nature quelconque, où une définition des éléments-limites a été donnée de sorte que, pour chaque ensemble E d'éléments de la classe : ou bien cet ensemble n'a pas d'éléments-limites, ou bien il existe un certain ensemble E′ (appelé *dérivé de* E) formé des éléments-limites de E. La définition des éléments-limites n'est assujettie qu'aux trois conditions suivantes :

a) Quels que soient deux ensembles E, F, on a

$$(E + F)' = E' + F'.$$

3° Un ensemble ne comprenant qu'un seul élément n'a aucun élément-limite.

4° Si A est élément-limite d'un ensemble E et si B est distinct de A, il y a toujours ou moins un ensemble F qui a A pour élément-limite sans avoir B pour élément-limite.

Ces conditions ne sont pas exactement celles de F. Riesz, mais elles leur équivalent dans leur ensemble. En particulier la condition *a*) est la condensation en une formule simple des deux conditions suivantes de F. Riesz :

1° Tout élément-limite d'un ensemble E est élément-limite de tout ensemble comprenant E;

2° Tout élément-limite de la somme de deux ensembles E, F est élément limite de l'un au moins de ces deux ensembles.

On voit facilement que toute classe ($\mathcal{L}$) satisfait aux quatre conditions de F. Riesz ; mais la réciproque n'est pas vraie : *les classes* ($\mathcal{R}$) *sont plus générales que les classes* ($\mathcal{L}$), comme le montre l'exemple du paragraphe XI.

NOUVELLE DÉFINITION DU VOISINAGE.

V. Il semble qu'on peut arriver à débarrasser la notion intuitive de voisinage de tout élément étranger, dans ses relations avec la notion d'élément-limite, en la présentant sous la forme suivante :

Supposons que dans une classe déterminée ($\mathcal{V}$) [1] corresponde à tout élément A une famille arbitraire $\{V_A\}$ d'ensembles V_A appelés *voisinages* de A. Un élément B, distinct de A, sera dit *voisin* de A s'il appartient à un des voisinages de A.

Par définition, un ensemble E *aura* A *pour élément-limite, s'il contient des éléments (autres que* A*) aussi voisins de* A *que l'on veut*, c'est-à-dire si tout voisinage V_A de A contient un élément au moins de E, autre que A.

VI. Il faut immédiatement remarquer que cette définition constructive de l'élément-limite est plus générale que les définitions descriptives employées dans les classes ($\mathcal{R}$) et ($\mathcal{L}$). Puisque toute classe ($\mathcal{L}$) est une classe ($\mathcal{R}$), il suffit de montrer que, *dans toute classe satisfaisant aux quatre conditions de F. Riesz, les éléments-limites peuvent être déterminés au moyen de familles de voisinages convenablement choisies*. En fait, les quatre conditions ne sont pas toutes nécessaires, il n'est besoin que d'imposer les deux conditions suivantes :

1° Tout élément-limite d'un ensemble E est élément-limite de tout ensemble comprenant E (c'est la condition 1° de F. Riesz, § IV).

b) Le fait pour un élément A d'être ou non élément-limite d'un ensemble E, ne dépend que des éléments de E autres que A (c'est

[1] La notation classe ($\mathcal{V}$) déjà employée dans les deux Mémoires cités plus haut a donc ici un sens plus général que dans ces deux Mémoires : elle s'applique à toute classe où les éléments-limites sont définis comme dans ce paragraphe V.

une conséquence des conditions 1°, 2° et 3° de F. Riesz, mais une conséquence moins restrictive que leur ensemble).

Si dans une classe d'éléments de nature quelconque, une définition des éléments-limites a été donnée, qui satisfait aux deux conditions précédentes (1° et *b*), *la classe est une classe* ($\mathcal{V}$), *c'est-à-dire qu'on peut y définir les éléments-limites comme au paragraphe V, par le moyen de familles de voisinages convenablement choisies.*

En effet, les conditions 1° et *b*) étant supposées satisfaites, considérons comme famille de voisinages attachée à chaque élément A, la famille des ensembles $V_A^{E_1}$ complémentaires des ensembles E_1 (c'est-à-dire chacun formé des éléments n'appartenant pas à E_1) qui n'ont pas A pour élément-limite ([1]).

Alors, si un ensemble E a A pour élément-limite, il aura un élément commun, autre que A, avec tout voisinage $V_A^{E_1}$ de A. Car, autrement, il serait entièrement compris, sauf peut-être A, dans un ensemble E_1 n'ayant pas A pour élément-limite. Or, même si l'on en retire A, E garde A pour élément-limite (condition *b*) et se trouverait alors compris dans un ensemble E_1 n'ayant pas A pour élément-limite contrairement à la condition 1°.

Inversement, si un ensemble E a un élément (autre que A) en commun avec tout $V_A^{E_1}$, il a A pour élément-limite. Car, dans le cas contraire, E serait lui-même un des ensembles E_1 et ne pourrait avoir aucun élément en commun avec son propre ensemble complémentaire.

D'autre part, si l'on se donne arbitrairement une classe ($\mathcal{V}$), les conditions 1° et *b*) sont évidemment remplies.

En résumé, la notion extrêmement générale de classe ($\mathcal{L}$) *que j'ai introduite dans ma Thèse est un cas particulier de la notion de classe* ($\mathcal{R}$) *présentée plus tard par M. F. Riesz, et celle-ci se trouve à son tour n'être qu'un cas particulier des classes* ($\mathcal{V}$) *où la définition de l'élément-limite* (*au lieu de se décrire par les conditions* 1° et *b*) *se déduit avec avantage.*

([1]) On pourrait aussi prendre pour voisinages les ensembles auquels A est *intérieur* (au sens indiqué § XI).

comme au paragraphe V, d'une façon éminemment claire et intuitive de la notion de voisinage réduite successivement à ses éléments essentiels.

Dans le Mémoire mentionné au paragraphe III, je n'avais considéré que le cas où la famille des voisinages est infinie dénombrable, cas où l'on a une classe ($\mathfrak{L}$) et non pas même la plus générale. Mais c'est le cas qui convient à l'analyse de la notion de distance que j'avais en vue.

PROPRIÉTÉS RÉSULTANT DU CHOIX DES FAMILLES DE VOISINAGES.

VII. Quand, au lieu de viser à une plus grande généralité, on cherche à obtenir des propriétés plus nombreuses, il faut imposer des restrictions aux choix des familles de voisinages. Nous allons déterminer quelles sont les restrictions qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'une classe ($\mathfrak{V}$) soit en même temps une classe ($\mathfrak{R}$), etc. Dans le Mémoire cité au paragraphe III, j'ai étudié un certain nombre de restrictions conduisant à la notion de distance.

Auparavant, il nous sera commode de déterminer à quelles conditions deux familles de voisinages sont équivalentes. Mais on a pu voir que la présence possible de l'élément A parmi les éléments des voisinages de A oblige à des précautions de langage et conduit à des énoncés inutilement compliqués. Or il est évident qu'on ne changera les ensembles dérivés d'aucun ensemble en supprimant des voisinages de chaque élément cet élément lui-même. En définitive, *nous supposerons à partir d'ici*, à moins d'indication contraire, que quels que soient l'élément A et le voisinage V_A de A, V_A *ne comprend pas* A.

VIII. *Familles équivalentes de voisinages.* — Supposons qu'on détermine les éléments-limites des ensembles d'une classe de deux façons différentes, en attachant à chaque A deux familles successives de voisinages $\{V_A\}$, $\{W_A\}$. Pour que ces familles soient *équivalentes*, c'est-à-dire pour qu'elles déterminent les mêmes ensembles dérivés, il faut et il suffit que pour chaque élément A tout voisinage V_A de la première famille comprenne entièrement au moins un voisinage W_A de la seconde et réciproquement.

Que la condition soit suffisante est bien évident. Elle est aussi nécessaire; car si l'un des V_A, soit V_A^0, ne comprenait entièrement aucun W_A, il y aurait dans chaque W_A un élément B n'appartenant pas à V_A^0. Alors l'ensemble $\{B\}$ des éléments B aurait A pour élément-limite quand on utilise la famille des W_A et non pas quand on utilise celle des V_A.

IX. *Classes de F. Riesz.* — Déterminons à quelles restrictions il faut astreindre les familles de voisinages pour que les éléments-limites satisfassent aux quatre conditions de F. Riesz du paragraphe VI.

La condition 1° est satisfaite d'elle-même.

La condition 3° est évidemment équivalente à la suivante : il n'y a aucun élément commun à tous les voisinages d'un même élément.

Si la condition 2° n'était pas réalisée, il existerait deux ensembles E, F tels qu'un certain élément-limite A de la somme E + F ne soit élément-limite ni de E, ni de F. Autrement dit, l'un V_A des voisinages de A n'aurait aucun élément en commun avec E, et un autre W_A aucun avec F, tandis que tout voisinage de A aurait un élément commun avec E + F. Il est évident qu'il suffit, pour éviter cette circonstance, d'admettre que l'ensemble commun à V_A et à W_A (qu'on peut représenter par $V_A . W_A$) contient entièrement un voisinage de A. Cette condition suffisante est aussi nécessaire. En effet, soit E un ensemble quelconque ayant A pour élément-limite. L'ensemble des éléments de E, s'il en existe, qui n'appartiennent pas à un voisinage déterminé V_A, ne saurait avoir A pour élément-limite. Si donc la condition 2° est réalisée, la partie commune $E . V_A$ à E et V_A aura A pour élément-limite et par suite aura un élément commun avec tout voisinage W_A de A. Autrement dit, tout ensemble $V_A . W_A$ commun à deux voisinages de A a un élément commun avec tuot ensemble E ayant A pour élément-limite. Il en résulte, d'après ce que nous avons dit des familles équivalentes, que $V_A . W_A$ doit contenir entièrement un des voisinages de A.

En ce qui concerne la condition 4°, elle exprime que si deux éléments A et B sont distincts et si l'on considérait pour un instant les voisinages V_B comme voisinages de A, les deux familles

$\{V_A\}$, $\{V_B\}$ ne sont pas équivalentes. Dès lors, la condition 4° de F. Riesz est équivalente à celle-ci : l'un au moins des voisinages V_B de B ne contient entièrement aucun voisinage de A et inversement.

Ainsi on obtient la définition la plus générale des éléments-limites satisfaisant aux quatre conditions de F. Riesz de la façon suivante :

On détermine les éléments-limites au moyen de familles de voisinages comme au paragraphe IV, en assujettissant seulement le choix des voisinages aux trois conditions suivantes :

2° *bis. L'ensemble commun à deux voisinages de* A *contient entièrement un voisinage de* A ;

3° *bis. Il n'y a aucun élément qui soit commun à tous les voisinages de* A ;

4° *bis. Quels que soient les éléments distincts* A, B, *l'un au moins des voisinages de* A *ne comprend entièrement aucun des voisinages de* B *et inversement.*

(Il est entendu que l'énoncé précédent suppose que tout élément est exclu de ses propres voisinages.)

X. Un grand nombre de classes considérées en Analyse vérifient non seulement les conditions de F. Riesz, mais la nouvelle condition.

5° *Tout ensemble dérivé est fermé* (c'est-à-dire contient ses propres éléments-limites).

C'est ce qui a lieu pour les ensembles linéaires ; c'est ce qui n'a pas lieu pour la classe des fonctions uniformes quand la limite y est définie de la façon ordinaire (c'est précisément dans ce fait que réside le fondement de la classification de Baire).

Il est évident que *cette propriété* 5° *est indépendante de l'existence des voisinages.* On peut former des classes jouissant de cette propriété et qui ne satisfont à aucune des propriétés 1° et *b*) (§ VI), propriétés qui sont caractéristiques des classes ($\mathfrak{V}$). Par exemple, on peut prendre la classe des nombres, et assigner comme ensembles dérivés des deux ensembles E $(0 \leq x \leq 2)$, F $(0 \leq x \leq 1)$ les ensembles respectifs E' $(0 \leq x \leq 1)$, F' $(x = 0)$, tandis que

tout autre ensemble n'aura par définition aucun élément-limite. D'autre part, l'exemple de la classe des fonctions uniformes cité plus haut montre qu'une classe satisfaisant à 1° et *b)* ou même aux quatre conditions de F. Riesz ou même une classe ($\mathfrak{L}$) peut ne pas jouir de la propriété en question 5°.

Il est alors intéressant de chercher à quelle condition une classe ($\mathfrak{V}$) peut jouir de cette propriété 5°.

Pour que tout ensemble dérivé soit fermé dans une classe où les éléments-limites sont définis par le moyen de familles de voisinages, il faut et il suffit que quels que soient l'élément A *et le voisinage* V_A *de* A, *il existe un voisinage* V_A^0 *de* A *dont tout élément* B *possède au moins un voisinage* V_B^0 *appartenant entièrement à* V_A.

Si la condition est vérifiée, tout élément A qui est élément-limite de l'ensemble dérivé E' d'un ensemble quelconque E appartient aussi à E'. Autrement dit, tout voisinage V_A de A contient un élément de E. En effet, la condition admise fait correspondre à V_A un certain voisinage V_A^0 de E. Puisque A est élément-limite de E', il y a un élément B de E' dans V_A^0. Or l'un des voisinages V_B^0 de B appartient entièrement à V_A par hypothèse et contient, puisque B appartient à E', un élément C de E. C'est l'élément annoncé.

Si la condition n'est pas vérifiée, il existe un élément A et un voisinage V_A^1 tel que, quel que soit le voisinage V_A de A, l'un des éléments B_1 de V_A ne possède aucun voisinage appartenant entièrement à V_A^1. Appelons alors E l'ensemble des éléments de la classe n'appartenant pas à V_A^1. L'ensemble dérivé de E contiendra nécessairement tous les B_1 correspondant aux divers V_A. Donc A sera élément-limite de E' et pourtant n'appartient pas à E' puisque E n'a aucun élément commun avec V_A^1.

Disons qu'un élément A est *intérieur* à un ensemble E lorsqu'il appartient à E et n'est pas élément-limite de l'ensemble des éléments n'appartenant pas à E.

On voit que A est intérieur à chacun de ses voisinages lorsqu'on l'ajoute à ces voisinages. Et inversement pour que A soit intérieur à E, il faut et il suffit que E contienne entièrement l'un des voisinages de A, augmenté de A lui-même.

Si, dans l'énoncé précédent (§ X), on suppose que la classe vérifie la condition 2°, il y a un voisinage V_A^1 contenu dans V_A et V_A^0 et qui jouira de la même propriété que V_A^0 ; en remplaçant V_A^0 par V_A^1, on voit qu'on pourra remplacer la dernière phrase de l'énoncé par celui-ci : *il existe un voisinage* V_A^1 *dont chaque élément est intérieur à* V_A.

XI. Comme *exemple d'une classe satisfaisant aux quatre conditions de F. Riesz et à la condition* 5° SANS ÊTRE UNE CLASSE ($\mathfrak{L}$), on peut citer la classe bien connue suivante : c'est celle des points d'une droite, où l'on ne considère comme éléments-limites d'un ensemble E que les points qui ont été appelés par Lindelöff les *points de condensation de* E, c'est-à-dire tels que, dans tout intervalle ayant pour centre un de ces points, il y ait une infinité non dénombrable de points de E.

En particulier, pour une telle classe, un ensemble dénombrable n'a jamais d'éléments-limites.

On peut choisir comme famille de voisinages d'un point A celle qui est formée par les ensembles V_A dont chacun d'eux contient les points d'un intervalle de centre A, sauf peut-être un ensemble dénombrable de points de l'intervalle.

D'autre part, en assignant à chaque élément A d'une manière quelconque une famille *arbitraire* de voisinages, on voit qu'on aura une classe ($\mathfrak{V}$) qui ne satisfera pas généralement aux conditions 2°, 3°, 4° de F. Riesz, ni à la condition 5°, à moins qu'on ait choisi des familles de voisinages particulières, satisfaisant aux conditions 2° *bis*, 3° *bis*, 4° *bis* du paragraphe IX ou à la condition du paragraphe X.

XII. *Classes* ($\mathfrak{L}$). — D'après le paragraphe VI toute classe ($\mathfrak{L}$) est une classe ($\mathfrak{V}$), c'est-à-dire qu'on peut déterminer une famille de voisinages de sorte que chaque ensemble ait les mêmes éléments-limites, qu'on définisse ceux-ci au moyen des suites convergentes ou par l'intermédiaire des voisinages.

La réciproque n'étant pas vraie, comment reconnaître si une classe ($\mathfrak{V}$) peut être considérée comme une classe ($\mathfrak{L}$)? Remarquons que, s'il en est ainsi, on peut extraire de tout ensemble E

ayant A pour élément-limite une suite S dénombrable infinie d'éléments distincts telle que toute suite infinie extraite de S ait aussi A pour élément-limite. Car si la classe est ($\mathfrak{L}$), on peut extraire de E une suite infinie dénombrable d'éléments distincts qui converge vers A. Or une telle suite S sera comprise dans tout voisinage de A à partir d'un certain rang. Autrement on pourrait en extraire une suite infinie dont aucun élément n'appartiendrait à un certain voisinage de A et, par suite, qui n'aurait pas A pour élément-limite. (Si l'on a soin de comprendre A parmi les éléments de chaque voisinage, on voit que, même si les éléments d'une suite convergeant vers A ne sont pas distincts, ils sont néanmoins compris dans chaque voisinage à partir d'un certain rang.)

Inversement, si cette propriété est vérifiée, la classe est ($\mathfrak{L}$). Autrement dit, si, étant donnée une classe ($\mathfrak{V}$), on peut, pour tout élément A de la classe, extraire, d'un ensemble quelconque E ayant A pour élément-limite, une suite infinie dénombrable S d'éléments distincts qui appartient à chaque voisinage de A à partir d'un certain rang, alors on peut considérer la classe comme une classe ($\mathfrak{L}$). Il suffira, en supposant que A appartient à ses voisinages, d'appeler *suite convergente vers* A toute suite infinie dont les éléments appartiennent à chaque voisinage de A à partir d'un certain rang. Alors un ensemble aura A pour élément-limite quand il contiendra une suite infinie d'éléments distincts qui converge vers A. Et les suites convergentes satisferont aux deux conditions du paragraphe II.

XIII. Il y a lieu de faire la remarque suivante : considérons une classe ($\mathfrak{L}$); les suites convergentes y sont bien déterminées. Formons-y des familles de voisinages qui permettent de la considérer comme une classe ($\mathfrak{V}$) sans changer les ensembles dérivés. Puis procédons comme plus haut pour définir des suites convergentes qui permettent de la considérer comme classe ($\mathfrak{L}$). Il est bien évident, d'après notre façon de procéder, qu'on devra retrouver comme suites convergeant vers un élément déterminé A toutes celles qui l'étaient au début. Mais il est bien possible qu'on en obtienne d'autres. Par exemple, on obtiendra ainsi toutes celles qu'on peut former directement en ajoutant à une suite convergeant vers A un nombre fini d'éléments quelconques distincts ou

non ou bien une infinité de fois l'élément A, ou plus généralement les éléments d'un nombre fini de suites qui convergent vers A.

Ceci montre en passant que, sans modifier les ensembles dérivés dans une classe $(\mathcal{L})$, on peut ajouter aux deux conditions du paragraphe II que doivent vérifier les suites convergentes, les conditions suivantes :

Si une suite S converge vers A, il en est de même de toute suite obtenue en ajoutant à S un nombre fini d'éléments (distincts ou non).

Si un nombre fini de suites $S_1, S_2, \ldots, S_n$ convergent vers A, il en est de même de toute suite obtenue en rangeant en une seule suite les éléments (distincts ou non) de $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

XIV. Le problème de déterminer à quelles conditions (à la fois nécessaires et suffisantes) doivent satisfaire les voisinages d'une classe $(\mathcal{V})$ pour que celle-ci puisse être aussi considérée comme une classe $(\mathcal{L})$, ne paraît pas offrir de grandes difficultés.

Les indications suivantes pourront mettre sur le chemin de la solution. Il faut d'abord supposer vérifiées les conditions 2° *bis*, 3° *bis*, 4° *bis* du paragraphe IX.

Ceci étant :

Une condition nécessaire mais non suffisante est que, pour chaque élément A, il existe une suite de voisinages $V_A^{(1)}, V_A^{(2)}, \ldots$, chacun appartenant au précédent et auquel aucun voisinage ne soit commun.

Une condition suffisante mais non nécessaire est que chaque famille de voisinages relative à un élément A soit dénombrable ou équivalente à une suite dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une suite de voisinages $V_A^{(1)}, V_A^{(2)}, \ldots$ telle que tout voisinage de A comprend au moins l'un des $V_A^{(n)}$.

XV. *Fonctionnelles continues.* — Une fonction ou, suivant la terminologie de M. Hadamard, une fonctionnelle U(A) est définie sur un ensemble abstrait E si à tout élément A de E correspond une valeur numérique déterminée de U(A).

On peut généraliser le calcul intégral sur une classe abstraite sans avoir à faire intervenir la notion d'élément-limite (comme je l'ai montré dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1915, p. 248-265).

Mais pour généraliser le calcul différentiel, cela n'est évidemment plus possible. En particulier, pour définir la continuité d'une fonctionnelle sur un ensemble, il faut au moins supposer qu'une définition a été donnée des éléments-limites de cet ensemble.

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de savoir quelle est cette définition ni même de lui imposer des conditions plus ou moins restrictives. Nous pouvons en effet rassembler en une formule unique toutes les définitions classiques de la continuité de la façon suivante :

Soit U(A) une fonctionnelle définie en tout élément A d'un ensemble E. Si B est un élément-limite de E ou d'un sous-ensemble de E, nous dirons que U(A) est continue en B, si :

c) Il existe un nombre $k(B)$ et un seul tel que, quel que soit le sous-ensemble G de E ayant aussi B pour élément-limite et ne comprenant pas B, le nombre $k(B)$ est égal à l'une des valeurs ou à l'une des limites des valeurs prises par U(A) sur G, $k(B)$ étant indépendant de G.

d) Au cas où B appartient à E, U(B) est précisément égal à $k(B)$.

Si U(A) est continue en tout élément-limite de E ou de ses sous-ensembles, nous dirons que U(A) est continue sur E. Si U(A) est continue sur E, elle est évidemment continue sur tout sous-ensemble de E.

XVI. Mais si nous nous servons de la notion de voisinage, la définition de la continuité va devenir beaucoup plus simple. En effet, appelons *oscillation d'une fonctionnelle* sur un sous-ensemble déterminé, K, de E la différence entre les bornes supérieure et inférieure des valeurs prises par la fonctionnelle sur K.

Si maintenant nous supposons que l'ensemble E appartient à une classe ($\mathcal{V}$), où, contrairement aux conventions précédentes (§ VII), les voisinages de B contiennent B, l'oscillation d'une fonctionnelle U(A) définie sur E et continue en A sera aussi petite que l'on veut sur un voisinage convenablement choisi. Autrement il existerait un nombre fixe $\varepsilon > 0$, tel que l'oscillation de U soit supérieure à ε sur tout voisinage de A. Alors il y aurait un élé-

ment C de chaque voisinage V_A, distinct de A, appartenant à E et tel que

$$|U(C) - k(A)| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dès lors, l'ensemble des éléments C formerait un sous-ensemble de E ayant A pour élément-limite et sur lequel aucune valeur ou aucune limite des valeurs prises par U ne pourrait être égale à $k(A)$.

Pour la réciproque, nous supposerons que notre classe $(\mathcal{V})$ satisfait à la condition 2° de F. Riesz. Alors, si l'oscillation de $U(A)$ sur l'ensemble des éléments de E appartenant à un voisinage de A contenant A peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant convenablement ce voisinage, la fonctionnelle $U(A)$ est continue en A. En effet, quel que soit l'entier n, il y a un voisinage $V_A^{(n)}$ sur lequel l'oscillation de U est inférieure à $\frac{1}{n}$. Puisque 2° de F. Riesz est vérifiée, on peut trouver un voisinage $W_A^{(2)}$ contenu dans $V_A^{(1)}$ et $V_A^{(2)}$, ..., un voisinage $W_A^{(n)}$ contenu dans $W_A^{(n-1)}$ et $V_A^{(n)}$, ... Alors on aura une série de voisinages $W_A^{(2)}, \ldots, W_A^{(n)}, \ldots$, chacun contenu dans le précédent et sur lesquels les oscillations de U sont inférieures à $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Si F est un sous-ensemble de E quelconque ayant A pour élément-limite, sans le contenir, il aura un élément au moins en commun avec $W_A^{(n)}$, soit B_n. Puisque, quel que soit p, B_n et B_{n+p} appartiennent à $W_A^{(n)}$, on aura

$$|U(B_n) - U(B_{n+p})| < \frac{1}{n}.$$

Et, d'après un théorème de Cauchy, les $U(B_n)$ auront une limite k. Ce nombre k est donc égal à une des valeurs ou à une des limites des valeurs prises par U sur F. Il est aussi indépendant de F puisqu'il diffère de $\frac{2}{n}$ au plus des valeurs de U sur $W_A^{(n)}$, quel que soit n.

De plus, si A appartient à E, parmi les valeurs de U sur $W_A^{(n)}$ dont l'oscillation est $< \frac{1}{n}$, figure $U(A)$. Donc

$$|U(A) - k| < \frac{2}{n},$$

autrement dit, $k = U(A)$.

Enfin, il ne peut y avoir un autre nombre k' jouissant de la même propriété que k. Car l'oscillation sur tout sous-ensemble de E ayant A pour élément-limite serait au moins égale à $|k' - k|$. Or, si 2° est vérifié, tout voisinage de A a A pour élément-limite et l'oscillation de U ne pourrait être infiniment petite sur aucun d'eux.

Ainsi, pour une classe $(\mathcal{V})$, satisfaisant à la condition 2° de F. Riesz, la définition des fonctionnelles continues données plus haut (§ XV) se simplifie et devient la suivante :

Une fonctionnelle U(A) définie sur E est continue en un élément-limite B de E si son oscillation sur l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à un voisinage W_A de B (voisinage contenant B) peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant convenablement ce voisinage.

XVII. Dans le cas d'une classe $(\mathcal{L})$, on peut exprimer autrement la définition des fonctionnelles continues.

Si $\{A_n\}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers A, toute suite $\{A_{n_i}\}$ extraite de $\{A_n\}$ a A pour élément-limite; donc, si U est une fonctionnelle continue sur E en A, $k(A)$ est l'une des valeurs ou l'une des limites des valeurs prises par une suite $\{U(A_{n_i})\}$ arbitrairement extraite de la suite $\{U(A_n)\}$. Ceci n'est possible que si cette suite elle-même tend vers $k(A)$. Réciproquement, si les valeurs prises par U sur une suite convergente quelconque vers A convergent vers $k(A)$, nombre indépendant de la suite, ce nombre sera égal à l'une des valeurs ou à l'une des valeurs limites des valeurs prises par U sur un sous-ensemble quelconque de E ayant A pour élément-limite sans le contenir.

Ainsi une fonctionnelle U définie sur un ensemble E appartenant à une classe $(\mathcal{L})$ est continue en A :

e) S'il existe un nombre $k(A)$ et un seul vers lequel convergent les valeurs prises par U sur toute suite extraite de E qui converge vers A, le nombre $k(A)$ étant indépendant de la suite;

f) Si en outre $k(A) = U(A)$ lorsque A appartient à E.

LIMITATION DE LA GÉNÉRALITÉ DU THÉORÈME DE BOREL.

Dans un article précédent (*Bull. Soc. math. France*, 1917), nous avons montré qu'un théorème de Borel, fondamental dans la

théorie des ensembles linéaires, peut être étendu aux classes ($\mathcal{S}$), c'est-à-dire aux classes ($\mathcal{L}$), où tout ensemble dérivé est fermé. Et nous avons montré aussi que cette condition que tout ensemble dérivé est fermé est, dans les classes ($\mathcal{L}$), nécessaire pour la validité du théorème de Borel.

On peut se demander si, en retenant cette dernière condition, on ne pourrait gagner en généralité en considérant des classes plus générales que les classes ($\mathcal{L}$), par exemple les classes de F. Riesz ou les classes ($\mathcal{V}$) définies au paragraphe V.

XVIII. Nous allons montrer de suite que le théorème de Borel ne peut s'étendre aux classes ($\mathcal{V}$), ni même aux classes ($\mathcal{R}$), les plus générales. Pour cela, nous conviendrons de dire qu'un ensemble E *possède la propriété de Borel* si, quelle que soit une famille *dénombrable* $\mathcal{F}$ d'ensembles I_n tels que tout élément de E soit intérieur à l'un au moins des I_n, il existe une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini des ensembles I_n de $\mathcal{F}$ et telle que tout élément de E est intérieur à l'un au moins des ensembles I_n de la famille $\mathcal{F}_1$.

XIX. *Si dans une classe* ($\mathcal{V}$) *un ensemble* E *possède la propriété de Borel, tout sous-ensemble infini de* E *a au moins un élément-limite appartenant à* E. En effet, dans le cas contraire, il y aurait au moins un sous-ensemble infini F de E n'ayant pas d'élément-limite appartenant à E, et par suite il en serait de même pour toute suite S dénombrable d'éléments de F, A_1, A_2, ..., A_n, ... Appelons alors I_0 l'ensemble des éléments de la classe autres que ceux de la suite S, et I_n l'ensemble formé de I_0 et de A_n. D'après l'hypothèse, A_n est intérieur à I_n et tout élément de E autre que ceux de S est intérieur à I_0. Donc les éléments de E devraient être intérieurs à un nombre fini des ensembles I_0, I_1, I_2, ...; or un nombre fini d'entre eux ne peut pourtant contenir qu'un nombre fini des éléments A_n de E.

Ainsi on voit en particulier que, pour posséder la propriété de Borel, E doit être au moins compact, c'est-à-dire que les ensembles dérivés de E et de ses sous-ensembles infinis comportent chacun au moins un élément. Or nous avons vu au paragraphe XI qu'il

existe des classes ($\mathcal{V}$) — et même des classes ($\mathcal{R}$) où tout ensemble dérivé est fermé — dont aucun ensemble n'est compact, puisque aucune suite dénombrable n'y a d'élément-limite. *Dans une telle classe aucun ensemble n'aura donc la propriété de Borel.* Ainsi le théorème de Borel n'est pas applicable à la classe de F. Riesz la plus générale, même si elle satisfait en outre à la condition que tout ensemble dérivé y est fermé.

Bien entendu, ces conclusions seraient à reviser si, au lieu de laisser entièrement arbitraire la contexture des ensembles I_n où l'on enclôt les ensembles, on les assujettissait à des conditions particulières : comme dans le cas des ensembles linéaires, si l'on ne prenait pour les I_n que des intervalles, bien que cela ne soit pas nécessaire pour la validité du théorème direct.

XX. Sous les réserves précédentes, nous allons cependant donner un énoncé du théorème de Borel applicable aux classes de F. Riesz ou, plus exactement, aux classes satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° de F. Riesz et à la condition : 5° Tout ensemble dérivé est fermé.

Dans cet énoncé, la condition que doit satisfaire l'ensemble considéré E dans la classe est que tout sous-ensemble infini de cet ensemble a au moins un élément-limite appartenant à E; nous avons d'ailleurs vu, au paragraphe précédent, que cette condition est indispensable. Toutes les fois que la classe est telle que, de tout ensemble ayant un élément-limite A, on peut extraire un sous-ensemble infini ayant un seul élément-limite qui est A, la condition précédente peut s'exprimer en disant que E doit être compact et fermé. C'est en particulier le cas des classes ($\mathcal{L}$) et c'est en effet sous cette forme que nous avons donné, dans un précédent article, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ait la propriété de Borel dans une classe ($\mathcal{S}$), c'est-à-dire dans une classe ($\mathcal{L}$) ayant aussi la propriété indispensable que nous avons numéroté 5°.

D'autre part, comme nous l'avons vu plus haut, il doit être entendu que, dans certaines des classes possédant les propriétés 1°, 2°, 3°, 5°, aucun ensemble ne satisfait à la condition exigée dans l'énoncé, de sorte que dans ces cas le théorème de Borel, j'entends par là sa généralisation actuelle, tombe dans le vide.

XXI. Pour arriver à l'énoncé, il nous sera d'abord utile de généraliser un lemme dû à Hedrick [1]. Nous pourrons délimiter le champ de validité de ce lemme de la façon suivante. Disons qu'une classe possède *la propriété de Hedrick* si, quels que soient l'ensemble E tiré de la classe, un élément A intérieur à E, — ou plus généralement n'appartenant pas à l'ensemble dérivé de l'ensemble des éléments autres que ceux de E, — et un ensemble F qui a A pour élément-limite, il existe un sous-ensemble F_1 de F ayant A pour élément-limite et dont tous les éléments sont intérieurs à E. Le professeur Hedrick a montré que toute classe ($\mathcal{S}$), c'est-à-dire toute classe ($\mathcal{L}$) satisfaisant à 5°, possède cette propriété ou plutôt la forme qu'il est loisible de lui donner dans le cas d'une classe ($\mathcal{L}$) en remplaçant F par une suite dénombrable convergeant vers A et F_1 par les termes de la suite F à partir d'un certain rang.

Nous allons montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe [2] possède la propriété de Hedrick est qu'elle soit une classe ($\mathcal{V}$) satisfaisant aux conditions 2° et 5°.

Tout d'abord, ces conditions sont suffisantes. Puisque A est intérieur à E, il existe un voisinage V_A^1 de A qui appartient entièrement à E. Puisque les conditions 2°, 5° sont vérifiées, on peut appliquer le théorème du paragraphe X, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V_A^0 de A dont tous les éléments sont intérieurs à V_A^1. Puisque F a A pour élément-limite, F et V_A^0 ont au moins un élément (autre que A) en commun. Soit F_1 l'ensemble de ces éléments communs. D'après 2°, F_1 a aussi A pour élément-limite puisque F est la somme de F_1 et d'un ensemble n'ayant aucun élément commun avec l'un, V_A^0, des voisinages. Et tous les éléments de F_1 sont intérieurs à E, d'après le théorème du paragraphe X.

Les conditions sont aussi nécessaires.

D'abord, la classe est nécessairement une classe ($\mathcal{V}$) : comme

---

(1) *Transactions Am. Math. Soc.*, 1911, t. XII, p. 285-294.

(2) Tout ce que nous supposons sur la classe est que les éléments-limites de chaque ensemble y soient bien définis d'une manière quelconque, pourvu que le fait pour un ensemble d'avoir ou non pour élément-limite un élément déterminé ne dépende que des éléments de l'ensemble autres que celui-ci, c'est-à-dire que nous supposons seulement vérifiée la condition *b*) du paragraphe VI.

la condition b) est supposée vérifiée, il suffit de prouver qu'il en est de même de 1°, c'est-à-dire que si un ensemble F a A pour élément-limite, il en est de même de tout ensemble F + G obtenu en ajoutant à F d'autres éléments. Or, s'il n'en était pas ainsi, l'élément A serait intérieur, d'après la condition b), à l'ensemble E de l'élément A et des éléments autres que ceux de F + G. Dès lors, si la propriété de Hedrick appartient à la classe, il y aurait un sous-ensemble F_1 de F qui, étant intérieur à E, devrait au moins lui appartenir. Comme on peut, d'après b), supprimer A de F s'il y a lieu, on voit qu'on arrive à une impossibilité.

Passons à la condition 2°. Si elle n'était pas vérifiée, il existerait un élément A qui serait élément-limite d'un ensemble F, somme de deux ensembles G, H, sans l'être ni de G ni de H. On peut supposer que F ne contient pas A, d'après b). Alors, si l'on appelle E l'ensemble des éléments de la classe autres que ceux de G, A sera intérieur à E et l'on pourra appliquer la propriété de Hedrick aux ensembles E, F. Dès lors, une partie F_1 de F devrait au moins appartenir à E; cette partie serait nécessairement une partie de H. De sorte que l'élément A serait élément-limite d'une partie F_1 de H sans l'être de H lui-même et la condition 1° ne serait pas vérifiée, contrairement au paragraphe précédent.

Enfin, arrivons à la condition 5°. Si elle n'était pas vérifiée, un certain élément A serait élément limite de l'ensemble dérivé F d'un certain ensemble G sans être élément-limite de G. Comme on a vu que la classe est nécessairement ($\mathcal{V}$), il existerait un voisinage V_A^0 de A sans élément commun avec G. Appelons alors E l'ensemble formé des éléments de V_A^0; A ne peut être élément-limite de l'ensemble complémentaire de V_A^0 à E; donc il existerait une partie F_1 de F qui serait intérieure à E et aurait A pour élément-limite. Il y aurait un élément B distinct de A commun à F_1 et V_A^0; cet élément appartenant à F serait élément-limite de G [1], c'est-à-dire d'un ensemble d'éléments n'appartenant pas à E. Donc B de F_1 ne serait pas intérieur à E.

---

[1] Si, dans le lemme de Hedrick, nous avions assujetti A à appartenir à l'ensemble, et par suite à lui être intérieur, nous aurions dû ici appeler E l'ensemble $A + V_A^0$ et alors, pour que le raisonnement actuel soit correct, il aurait fa lu admettre que la condition 3° est vérifiée. Au contraire, on voit qu'on a pu, sans cette restriction au lemme et sans invoquer 3°, démontrer que les conditions étaient suffisantes.

Ainsi, non seulement nous avons donné au lemme de Hedrick une forme plus générale, mais encore nous en avons donné la forme *la plus* générale dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés. Autrement dit encore, *pour toute classe vérifiant la condition b), il est équivalent de dire qu'elle vérifie l'ensemble des conditions* 1°, 2°, 5°, *ou de dire qu'elle a la propriété de Hedrick.*

XXII. *Dans toute classe* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant aux conditions* 2°, 3° *et* 5°, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *d'éléments de la classe ait la propriété de Borel est que tout sous-ensemble infini de cet ensemble* E *a au moins un élément-limite appartenant à* E.

Nous avons vu que la condition était nécessaire. Réciproquement, si elle est vérifiée, l'ensemble E a la propriété de Borel; autrement, il existerait une famille dénombrable $\mathcal{F}$ d'ensembles I_n telle que tout élément de E est intérieur à au moins l'un des I_n sans qu'on puisse remplacer les I_n par un nombre fini d'entre eux. Alors, l'un au moins A_1 des éléments de E ne serait pas intérieur à I_1. Mais A_1 est intérieur à l'un au moins des I_n; soit I_{n_2} le premier ($n_2 > 1$). L'un au moins des éléments de E n'est intérieur ni à I_1, ni à I_2, ni à I_3, ..., ni à I_{n_2}, soit A_2 nécessairement distinct de A_1. Et ainsi de suite ; nous formerons une suite illimitée d'ensembles I_n

$$I_1, I_{n_2}, I_{n_3}, \ldots \qquad (1 < n_2 < n_3, \ldots)$$

et d'éléments de E distincts $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Par hypothèse, il existe un élément A de E qui est élément-limite de l'ensemble F des éléments $A_1, A_2, \ldots$. Mais A est intérieur à l'un des ensembles I_n, soit I_{n_0}. Alors, comme la classe possède la propriété de Hedrick, il existe un sous-ensemble F_1 de F ayant A pour élément-limite et intérieur à I_{n_0}. Or, pour p assez grand, n_p sera supérieur à n_0 (soit pour $p > p_0$) et par suite A_p, par définition, ne sera pas intérieur à I_{n_0}. Donc F_1 ne contient que des éléments A_p d'indices inférieurs à p_0. C'est ici qu'intervient la condition 3° qui n'a pas encore été utilisée. Combinée avec 2°, elle exclut le cas d'un ensemble F_1 composé d'un nombre fini d'éléments et qui aurait cependant un élément-limite. On obtient bien la contradiction prévue.

MÉLANGES.

UN ÉCRIT DE BEAUGRAND SUR LA MÉTHODE DES TANGENTES DE FERMAT A PROPOS DE CELLE DE DESCARTES;

PAR M. C. DE WAARD.

La publication de cet écrit exige des renseignements préalables sur son auteur. Ce qu'on sait de lui se trouve dans des recueils divers, où il est question plutôt de ses amis ou de ses adversaires, nonobstant le rôle assez important qu'il joua dans l'histoire des mathématiques, de 1630 à 1640 environ.

Les premiers de ces renseignements se rattachent à la mémoire de Viète. On sait que l'analyste de Fontenay légua une partie de ses manuscrits à son secrétaire Pierre Alleaume; puis ils passèrent entre les mains du fils de celui-ci, Jacques Alleaume, déchiffreur de dépêches au service des États des Provinces unies, et ingénieur au service de Louis XIII. Alleaume laissa le soin d'en publier une partie, en 1615, au géomètre écossais Alexandre Anderson. Plusieurs autres de ses écrits furent possédés par Jean d'Espagnet et son fils Étienne, tous deux conseillers au Parlement de Bordeaux et connus comme chimistes, qui en firent prendre connaissance entre autres à Fermat (1). Enfin une autre partie vint en possession de Beaugrand, nommé l'ami de Viète dans la dédicace que lui consacra, en 1630, le traducteur d'un des Ouvrages posthumes du célèbre mathématicien (2); l'année suivante, Beaugrand lui-même édita à Paris une seconde partie de l'*Art analytique* de Viète (3) d'après une copie inédite, rédigée

(1) *Œuvres de* FERMAT, éd. Tannery et Henry, t. II (Paris, 1894), p. 133.

(2) *Les cinq livres des zététiques de* FRANÇOIS VIETTE *mis en françois, commentez et augmentez des exemples de Poristique et Exégétique*, etc., *par* J.-L. de Vay-Lezard, *mathématicien, à Paris chez Iulian Iacquin*, etc., *MDC.LII.* — Dans une addition à la fin du Volume, on trouve le nom écrit comme *de Vaulezard*.

(3) *Ad logisticem speciosam Notæ priores* (Paris, Guillaume Baudry, 1631).

probablement sur le manuscrit original que celui-ci lui avait confié ([1]).

La solution d'un certain problème par Beaugrand, dans l'édition mentionnée, donna occasion à Hardy et à Roberval d'en envoyer une critique à Mersenne. Beaugrand remit alors de sa part au Minime une « reigle de connoistre les changemens differens de plusieurs lettres lorsqu'une mesme lettre est repetée 2, 3, ou plusieurs fois », et il assurait, dans une lettre inédite à Mersenne, du 20 février 1632 ([2]), d'avoir « plusieurs moyens de rendre l'analyse spécieuse plus générale ». Sans doute Beaugrand était déjà lié d'amitié avec Fermat, magistrat comme lui. Nommé par Richelieu, au printemps de 1634, avec Étienne Pascal, Mydorge, les professeurs de mathématiques Boulenger et Hérigone et d'autres encore, commissaire dans l'affaire fameuse de la détermination des longitudes de Morin (qui le désignait dans des défis à ces commissaires comme « l'homme placide »), Beaugrand est aussi appelé en cette occasion professeur de mathématiques ([3]), probablement à tort, car lorsqu'il signa bientôt le privilège pour une publication de Mersenne, dont l'achevé d'imprimer est du 30 juin 1634 ([4]), il le fit sans doute en qualité de secrétaire du roi, fonction qui lui est toujours attribuée dans la suite.

([1]) Plus tard encore, Beaugrand fut sollicité de communiquer les manuscrits de Viète en sa possession. « Quant aux œuvres de Vieta — écrivirent les Elzeviers de Leyde le 8 mars 1638 à Mersenne — nous le commencerons si tost que nous aurons le tout complet. Pourtant il vous plaira procurer par Monsr du Vougrand (*sic*) tant les corrections que aussi le manuscript du dict aucteur que vous escrivez n'estre jamais imprimé. Nous faisons estat de le faire in-folio, comme ferons aussi avecque le temps toutes les œuvres de Galilæus » (lettre publiée en fac-simile chez H. Lempertz, *Bilderhefte zur Geschichte des Bucherhandels*, Cöln, 1853-1865, in-fol.). Comp. aussi une lettre de Descartes à Mersenne du 30 août 1640 (*Œuvres de* Descartes, éd. Ch. Adam et P. Tannery, t. III, p. 167-168). On sait que l'édition des œuvres de Viète, recueillies par les soins de François van Schooten le jeune, ne vit pas le jour avant 1646.

([2]) Codex Vindob., 7049, n° 7.

([3]) Sédillot, *Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France* [extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle sc. mat. e fis.* du prince Boncompagni, t. II (1869) et t. III (1870), p. 105]. Voir aussi les *Œuvres de* Blaise Pascal, éd. Brunschvicg et Boutroux, t. I (1908), p. 169-171 et 194-195.

([4]) *Les questions theologiques, physiques, morales et mathematiques*, etc. *composées par L(e) P(ère) M(ersenne)*. A Paris, M.DC.XXXIV, avec d'autres Ouvrages réunis dans un même volume.

D'ailleurs, il avait fait déjà en 1634 la connaissance du philosophe anglais Thomas Hobbes, qui fit alors quelque séjour à Paris ([1]). Et quoiqu'on ne trouve pas Beaugrand mentionné expressément parmi ceux qui fréquentaient, comme Étienne Pascal, Mydorge, Hardy, Roberval et Desargues, cette académie de mathématiques que Mersenne inaugura vers le mois de mai 1635, on ne peut guère douter que Beaugrand se joignit à ces savants avec lesquels il était étroitement lié à cette époque. Mersenne loua alors ses connaissances en harmonie et en géométrie ([2]); il le connaissait peut-être aussi comme le dépositaire à Paris des manuscrits de Fermat, qui envoya en 1635 à Beaugrand entre autres sa méthode pour la détermination des centres de gravité, application de la méthode célèbre *de maximis* et *minimis* du géomètre de Toulouse ([3]).

Les connaissances qu'on attribue à Beaugrand semblent confirmées par le bon accueil qu'il reçut pendant un voyage en Italie durant l'automne de 1635. En visitant Castelli à Rome, Cavalieri à Bologne et Galilée à Arcetri [à qui il envoya à cette époque une lettre qui nous est conservée avec la réponse ([4])], il ne communiqua pas seulement à ses hôtes des propositions de Fermat, comme celle de la construction d'une parabole qui est donnée par quatre de ses points ([5]), mais aussi des idées du géomètre de Toulouse sur la pesanteur et sur des principes qui avaient du rapport avec ceux qu'il élabora dans un Ouvrage qu'il préparait ([6]). Ainsi Cavalieri, ayant conçu par ces conversations une grande

---

([1]) *Œuvres de* DESCARTES, éd. cit., t. III, p. 342.

([2]) « ... Dominus Beaugrand Regis Regiæ domus ac regni et ærarij Sanctioris consiliarius atque Secretarius, cui plurimum debebit Geometria, si quando volet » (*Harmonicorum libri in quibus agitur de sononum natura*, etc. Lutetiæ Parisiorum sumptibus Gulielmi Baudry M. DC. XXXVI, partie seconde, p. 50).

([3]) *Voir* notre article *Lettres inédites de* FERMAT dans les *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, 11e série, t. V, 1917, p. 75.

([4]) *Le Opere di* GALILEO GALILEI (éd. nat. vol. XVI, 1905, p. 335-337 et 340-344).

([5]) *Ibid.*, vol. XVI, p. 345 et 366; c'est donc d'avant cette époque que date la pièce publiée dans les *Œuvres de* FERMAT. éd. cit., t. I. p. 84-87.

([6]) *Voir* la lettre de Cavalieri à Castelli, du 19 décembre 1635, chez Ch. Henry. *Galilée, Torricelli, Cavalieri, Castelli* [extrait des *Memorie delle Reale Accademia dei Lincei* (*classe di Sc. mor.*) 3e série, vol. V. 1880, p. 16-17] et une lettre de Castelli de date inconnue, publiée dans les *Œuvres de* FERMAT, éd. cit., t. II, p. 26.

opinion de Beaugrand, exprima dans une lettre à Galilée, du 24 décembre 1635, sa joie d'avoir aussi, par son intermédiaire, de la communication avec les autres mathématiciens de la France. La renommée de Beaugrand est confirmée encore par un passage de la première lettre connue de Fermat à Mersenne; ce dernier était entré en correspondance avec Fermat précisément peut-être par l'intermédiaire de Beaugrand, revenu d'Italie : « Vous m'obligerez beaucoup — écrivit le géomètre de Toulouse le 26 avril 1636 (1) — de me faire savoir si M. de Beaugrand est à Paris. C'est un homme duquel je fais une estime très singulière; il a l'esprit merveilleusement inventif, et je crois que sa *Géostatique* sera quelque chose de fort excellent. Je lui écrirai dès que vous m'aurez donné de ses nouvelles. »

L'Ouvrage de Beaugrand parut avec une dédicace à Richelieu du 20 avril, privilège de mai 1636 (2). Les entretiens de l'auteur avec Galilée y sont mentionnés; et l'auteur suppose entre autres que la force, par laquelle un élément du volume d'un corps est attiré par un point fixe, est proportionnelle à la distance (3). Mais cet Ouvrage fut cependant une désillusion complète pour la plupart des amis de Beaugrand. Desargues, par exemple, exhorta Guy de la Brosse d'en publier une sévère critique, qui parut au commencement de l'année 1637, remplie de « paroles d'aigreur » : ce fut la cause d'une rupture complète entre Desargues et Beaugrand. D'autre part, Fermat, tout en assurant Mersenne au sujet de Beaugrand qu'il estimait fort son esprit et qu' : « il m'en a donné de si grandes preuves, que j'ai peine à me persuader qu'ayant entrepris une opinion contraire à la sienne, je ne me sois éloigné de la vérité », ne pouvait en parler enfin que d'une « cause tout à fait déplorée » (4).

---

(1) *Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 4-5.

(2) Ioannis de Beaugrand *Regi Franciæ domui regnoque ac ærario sanctiori a consiliis secretisque Geostatice seu de vario pondere gravium secundum varia a terræ (catro) intervalla Dissertatio mathematica.* Parisiis apud Tussanum du Bray, viâ Iacobæa sub Spicis maturis M. DC. XXXVI. In-fol., 27 pages.

(3) *Voir*, pour un exposé de la théorie de Beaugrand, les *Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 7-8, la note 2, les *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. II, p. 645-647, et Duhem, *Les origines de la Statique*, t. II (Paris, 1906), p. 178 et suiv.

(4) *Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 14 et 111.

De son côté, Beaugrand trouva bientôt aussi occasion de critiquer. Au printemps de 1637 les feuilles du *Discours* de Descartes, imprimées en Hollande, arrivèrent à Paris entre les mains de Mersenne pour obtenir un privilège français. Beaugrand avait déjà signé, peut-être en sa qualité de secrétaire du roi, un tel privilège en 1634 pour le Minime, comme il le fera encore en 1638 pour un autre écrit du même ([1]). Il eut connaissance des feuilles qui traitaient de la *Dioptrique* et les envoya, contrairement aux intentions de l'auteur et sans doute à l'insu de Mersenne ([2]), à Fermat qui envoya ses remarques sur la déduction de la loi des sinus dès le mois d'avril ou de mai 1637 à Mersenne; celui-ci les envoya à son tour à Descartes à la fin de septembre, c'est-à-dire encore avant que l'Ouvrage même ne fût distribué à Paris, ce qui n'arriva qu'à la fin de l'année 1637. Vers la même époque, et probablement encore avant la fin de décembre 1637, Beaugrand fit part aux mathématiciens de Paris de ses critiques sur cette partie de l'Ouvrage de Descartes qui traitait de la *Géométrie*, en disant « qu'il donnerait dans une préface des moyens pour trouver les tangentes de toutes les lignes courbes, qui seraient meilleurs que ceux émis dans cet Ouvrage ([3]) ». Et il continuait de s'occuper d'autres critiques encore sur la publication du philosophe, comme le prouve une lettre de Descartes à Mersenne, de mars 1638 ([4]), et cette lettre de Desargues à Mersenne, du 4 avril 1638 ([5]), par où Desargues tâchait de concilier les vues différentes sur le problème de la construction des tangentes, celles de l'auteur de la *Géométrie* qui avait laissé en effet dans son Ouvrage trop d'obscurités voulues, et celles de ses autres adversaires, Roberval et Étienne Pascal, qui mettaient en avant la méthode de Fermat.

Jusqu'à présent on ne connaissait des attaques de Beaugrand que celles qui regardent la partie algébrique du travail de Des-

---

([1]) *Les nouvelles pensées de Galilée*, etc. (Paris, M. DC. XXXIX).

([2]) *Œuvres de* DESCARTES, éd. cit., t. I, p. 355 et 390-391; t. II, p. 25, 85 et 272.

([3]) *Ibid.*, t. I, p. 478 et 479.

([4]) *Ibid.*, t. II, p. 82.

([5]) *Ibid.*, t. XI, 1909, p. VII des *Errata* à la fin du volume. *Œuvres de* FERMAT, éd. cit., t. IV, 1912, p. 47, et l'*Analyse d'autographes et d'autres écrits de Girard Desargues* (1593-1662), par H. Brocard (Bar-le-Duc, 1913), p. 16.

cartes avec la solution d'équations et les propriétés de leurs racines. Une lettre de Beaugrand à Mersenne, que Paul Tannery croyait être une de ses premières critiques et dont il fixe la date vers le mois d'avril 1638, a été publiée dans la nouvelle édition des *Œuvres de Descartes*, t. V, p. 503-512. Tannery avait déjà publié dans le présent recueil de l'année 1891 (¹) trois autres pamphlets contre Descartes, répandus à Paris sous forme manuscrite et sans nom d'auteur, mais rédigés, sans doute, par Beaugrand: le premier datait probablement d'avant le mois de juin 1638, les deux autres étaient postérieurs. Sauf le premier, ces pamphlets sont rédigés d'un ton assez injurieux, l'auteur appelant Descartes, par allusion au titre de son Ouvrage, le *Méthodique* ou le *Méthodique impertinent*, ou, rappelant que le philosophe avait servi sous le prince Maurice, il l'appelait le *soldat philosophe* ou *miles philosophus;* Descartes, dans ses lettres à Mersenne, lui rendait la pareille, ne l'appelant que le *Géostaticien*. Il portait un jugement sévère, mais juste sur le livre de Beaugrand, qu'il avait reçu enfin en Hollande en juin 1638. Tandis que le but principal de Beaugrand dans ces quatre écrits était d'attribuer à son ancien ami Viète la paternité de la plupart des découvertes de Descartes (le dernier pamphlet contenant aussi l'accusation fameuse d'un plagiat du philosophe à l'endroit de Harriot), les éditeurs de ces écrits ont remarqué que leur valeur réelle consiste dans l'usage des locutions *positive* et *négative* absolument dans le sens moderne en ce qui concerne les valeurs des racines des équations, et dans l'usage des exposants, qui suivent déjà avant la divulgation des écrits de Beangrand [comme par exemple dans l'Ouvrage de Hérigone (²)] sur la même ligne les lettres qu'ils affectent, mais se présentent aussi, dans la notation même de Beaugrand, comme de vrais exposants marqués en chiffres romains dans une paraphrase des œuvres de Viète, publiée en 1636 par Jacques Hume (³), Ouvrages dont on ne peut guère douter qu'ils étaient connus de Beaugrand.

(¹) Réimprimée à part sous le titre de *La Correspondance de Descartes dans les Inédits du fonds Libri* (Paris, 1893), p. 41-55.

(²) *Cours mathématique*, etc., *à Paris*, M. DC. XXXIV.

(³) *Algèbre de Viète d'une méthode nouvelle, claire et facile*, etc. Paris, chez Lucien Boulenger, rue Sainct-Jacques, à l'image Sainct-Louys. M. DC. XXXVI.

Quant à la partie plus géométrique de l'Ouvrage de Descartes, on n'avait jusqu'à présent aucune indication que Beaugrand eût exécuté la promesse qu'il avait faite au sujet de la construction des tangentes, depuis que cet Ouvrage était répandu à Paris. En effet, nonobstant ses relations précoces avec Fermat, qui communiqua ses découvertes à Beaugrand longtemps avant qu'elles vinssent à la connaissance des autres mathématiciens de Paris, il y a au contraire toute apparence que l'ami intime de Fermat avait gardé jusqu'ici la méthode pour le tracé des tangentes du géomètre de Toulouse (car on ne peut guère douter que c'était celle-ci qu'il avait en vue dans sa promesse) soigneusement pour soi et ce fut Carcavy qui remit à Mersenne, à la fin de l'année 1637, le premier exposé de la méthode de Fermat, ne comprenant que son application aux sections coniques; et Mersenne fit connaître cette méthode aux autres géomètres de Paris et à Descartes. Mais, comme on l'a vu, après que Roberval et Étienne Pascal eurent engagé, au commencement de l'année 1638, des disputes avec Descartes sur la méthode de Fermat, Desargues nomma aussi Beaugrand parmi ceux qui critiquaient celle du philosophe et, si son nom ne figure pas à cette occasion avec ceux des deux défenseurs du géomètre de Toulouse, la raison en est peut-être soit dans ce fait que Roberval et Pascal étaient comme le porte-parole de toute l'assemblée de mathématiciens de Paris, dont il est parlé plus haut, soit dans la circonstance qu'aussi ses relations avec Roberval, comme avec Desargues, n'étaient pas alors assez amicales : nonobstant les prières de Fermat il refusait en 1637 et 1638 de bailler à Roberval certains manuscrits du géomètre de Toulouse qu'il avait par devers lui [1] et leurs rapports s'aigrissaient plus encore. Ajoutons, à propos des disputes entre Descartes et ses deux adversaires, que Fermat envoya à Paris, en juin 1638, encore un nouvel exposé de sa méthode, mais qui ne contient pas d'autres applications que le précédent.

La pièce que nous publions se trouve dans un recueil conservé au British Museum à Londres (*Harleian mss* 6796, *art.* 18, fol. 155 recto-161 verso) et dressé par Thomas Hobbes, déjà nommé, qui correspondait, depuis sa visite à Paris, entre autres avec

---

[1]. *Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 105 et 133.

Mersenne et qui fréquenta les mathématiciens de cette ville aussi pendant le séjour de dix années qu'il y fit depuis qu'éclatèrent les troubles en Angleterre l'année 1640. Dans cette pièce donc, Beaugrand critique à sa façon la méthode de Descartes. Bien que l'écrit ne porte point son nom, c'est lui qui en est l'auteur comme on voit par le texte même. Quant à la date, qui n'y figure pas plus qu'aux autres écrits volants de Beaugrand, le ton assez digne, et par lequel Descartes même, s'il avait eu communication de la pièce, ne pouvait pas se sentir offensé, ferait croire qu'on la doit fixer antérieurement aux autres attaques de Beaugrand contre Descartes. Des passages de lettres de Florimond de Beaune à Mersenne, publiées par les éditeurs de Descartes, semblent indiquer cependant que l'écrit serait de l'automne de 1638.

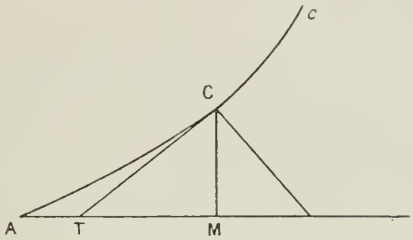
D'abord ne s'étant pas encore rendu maître de la méthode des tangentes de Descartes, le conseiller au présidial de Blois, ne s'était mêlé que du *problème direct des tangentes;* mais peu de temps après la réception de l'Ouvrage à Paris il posa le célèbre *problème inverse des tangentes* qui porte son nom : celui-ci était connu de Fermat au milieu de juin 1638 (1) et nous savons que Debeaune lui-même proposa le problème pour deux lignes courbes certainement avant ou vers le mois de septembre 1638. La condition énoncée auparavant pour la première courbe faisant toujours défaut, Paul Tannery, dans l'édition de Descartes, emprunta à un traité anonyme, écrit vers 1700 et conservé à la bibliothèque nationale, la définition « d'une des deux lignes courbes qui furent proposées à M. Descartes par M. de Beaune » par l'intermédiaire de Mersenne. « Ce premier exemple — dit l'auteur du manuscrit (2) — est tel. Soit certaine ligne courbe ACc, dont AM soit l'abscisse et MC soit l'ordonnée que l'on suppose luy estre perpendiculaire pour plus grande facilité. Que la tangente au point C soit CT. La nature de cette ligne est telle que la

(1) « On pourrait ensuite chercher — disait Fermat à la fin de son exposé de sa méthode à cette date — la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir; à laquelle question aboutissent celles des verres brûlants proposées par M. Descartes » (*Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 162).

(2) *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. V, p. 514.

quantité donnée B jointe à l'abscisse AM soit à AM comme la même AM est à l'ordonnée MC. »

Fig. 1.



Ni Debeaune ni Roberval ne purent trouver la solution de ce problème si facile pour nous (1). Mais avant que Descartes ait envoyé de Hollande sa réponse (dans une lettre perdue du 11 octobre 1638), Beaugrand fit parvenir à Debeaune une prétendue solution du problème, dont il est parlé dans une lettre de ce dernier à Mersenne du 25 septembre 1638 : « J'ay receu — dit-il (2) — deux lettres de vostre part, dans la première desquelles est contenue l'invention de la première contingente de celles que ie désirois sçavoir de Mr Des Cartes, trouvée par Mr de Beaugrand. Ie luy ay beaucoup d'obligation de la peine qu'il a prise à mon subiect, mais ma difficulté ne consistoit pas tant d'avoir ceste ligne, qui ne me sert à rien, comme de sçavoir le moyen de trouver ces sortes de lignes, qui est une science géométrique que ie désirois avoir, et qui m'est beaucoup utile à expliquer mes pensées. Et néantmoins Mr de Beaugrand n'avoit point mis ce moyen, ni mesmes la démonstration de sa proposition. »

Or, c'est précisément ce premier exemple du problème inverse des tangentes de Debeaune, dont la solution jusqu'à certain degré avait été envoyée de la part de Beaugrand et par l'intermédiaire de Mersenne à Blois, qu'on retrouve dans notre manuscrit. Toutefois

(1) « Il n'avoit pas remarqué, non plus que moy — écrivait Debeaune à l'égard de Roberval, dans une lettre du 13 novembre 1638 à Mersenne — que ce fust une hyperbole. » Comp. cependant sa lettre à Roberval du 10 octobre 1638 (*Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. V, p. 517 et 528). Enfin pour les efforts infructueux de Debeaune lui-même, *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. II, p. 424.

(2) *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. V, p. 515.

il ne semble pas qu'on ait le droit d'identifier ce dernier avec l'écrit indiqué par Debeaune dans sa lettre. On reconnaît facilement que notre manuscrit consiste, pour une bonne partie, dans une application de la méthode de Fermat à la construction des tangentes. Mais les exposés et exemples que l'inventeur avait envoyés à Paris n'étaient pas encore connus du conseiller de Blois à la fin de septembre, ni son application à l'exemple qui se trouve dans notre manuscrit, puisqu'il pria Roberval dans une lettre du 10 octobre 1638 (1) « de m'envoyer au plus tost, par nostre messager, la méthode de Mr Fermat, que vous m'avés promis, avec l'analyse de ma première ligne pour m'en servir d'exemple ». C'est à cette dernière condition que notre manuscrit répond aussi, et mieux que l'écrit précédent de Beaugrand ; Roberval aura donc transmis la prière de Debeaune sans doute à Mersenne, qui d'ailleurs devait faire tenir l'exposé à Debeaune selon le vœu exprès de celui-ci, et le Minime se sera adressé à Beaugrand. Du reste, la lettre de Debeaune du 25 septembre 1638 étant envoyée, au moins en ce qui concerne le contenu principal, par Mersenne en Hollande à la fin d'octobre 1638, Descartes y répondit le 15 novembre 1638 (2) : Roberval et Beaugrand lui « semblent plaisans, en ce qu'ils se vantent d'avoir trouvé les deux lignes de M. de Beaune, et toutesfois ils n'ont pas seulement sceu connoistre que la première, qui est incomparablement plus aisée que l'autre, est une hyperbole (3) », et dans la même lettre, au reçu de la critique de Roberval à sa solution du premier exemple de Debeaune, envoyée par Mersenne en Hollande le 1er novembre 1638 : « Ne craignez pas que je me sois mépris en disant que la première des lignes de M. de Beaune est une hyperbole, et sçachez que tous

(1) *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. V, p. 518.

(2) *Ibid.*, éd. cit., t. II, p. 434-435.

(3) Outre « les plus célèbres mathématiciens de Paris », la seconde ligne de Debeaune, dont la solution dépend de l'intégration de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$, fut proposée aussi à Fermat (*Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. IV, p. 230). Debeaune lui-même en envoya d'abord, le 10 octobre 1638, une solution erronée à Roberval; enfin Descartes résolut cet exemple, devenu classique, du problème de Debeaune, dans sa lettre du 20 février 1639, en démontrant que la courbe était une logarithmique à ordonnées inclinées. *Voir* d'ailleurs les *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. V, p. 519 et suiv., 558 et 535, et t. II, p. 466, 491 et 522-525.

ceux qui l'ont examiné sans le reconnoistre, se sont grandement mépris » (1). Parmi ces derniers, on ne peut pas compter Beaugrand.

On a vu que les rapports de celui-ci avec Roberval n'étaient pas des meilleurs; en effet, dans sa troisième lettre-circulaire (2), Beaugrand pouvait parler ouvertement de « ce fou de Roberval ». Quoiqu'il semble avoir gardé l'amitié de mathématiciens comme Étienne Pascal et Hardy (3), ses relations aussi avec Desargues, contre qui il publiait en juillet 1640 encore un pamphlet, s'aigrissaient de plus en plus. Celles-ci nous fournissent encore le renseignement suivant, qui se trouve dans un Ouvrage de Desargues, publié à Paris au mois d'août 1640, où l'auteur s'exprime ainsi (4) : « Puisqu'un reste de page et l'occasion y convient, afin qu'après ce Brouillon il n'y ait plus en cecy d'abusez que ceux qui le voudront bien estre, on ne doit pas croire à tout esprit, ny à toute apparence; à tout esprit, en croyant que tous ceux qui font en particulier une grande monstre de plusieurs belles pensées en soit toujours les autheurs. On void escrit à la main une belle maniere de trouver les touchantes aux courbes, ensuitte des plus grands et plus petits, laquelle est avérée de monsieur de Fermat, très digne conseiller de parlement de Tholoze. » La première des deux pièces dont il est parlé ici peut fort bien être le présent écrit de Beaugrand, visé par Desargues, comme il le fut, sans doute aussi, après la lecture de l'Ouvrage, par Fermat dans une lettre à Frenicle d'octobre 1640 (5) et plus tard ouvertement par Blaise Pascal (6). En effet, à ceux qui ignoraient que l'écrit de Beaugrand était envoyé à son destinataire comme un exposé de la

---

(1) *Œuvres de* DESCARTES, éd. cit., t. II, p. 444.

(2) *Bull. Sc.*, 2e série, t. XV, 1891, p. 286, ou la réimpression citée ci-avant, p. 55.

(3) Ainsi le Père Fournier rapporte que l'éclipse du Soleil, arrivée le 1er juin 1639, fut observée à Paris : 1° par M. de Roberval, professeur en Mathématiques, M. le trésorier Mydorge et le R. P. Pétau, jésuite : 2° M. Beaugrand, secrétaire, assisté de M. le Président Pascal et M. Hardi, conseiller au Chastelet; 3° M. Boulliaud; observée à Blois par M. de Beaune, conseiller du Roy, etc. (*Hydrographie*, etc., 1643, p. 582-583).

(4) *Brouillon projet d'exemple*, etc. [*Œuvres de* DESARGUES *réunies et analysées par M. Poudra*, t. I (Paris, 1864), p. 354-355].

(5) *Œuvres de* FERMAT, éd. cit., t. II, p. 207.

(6) *Histoire de la Roulette*, 1658 [*Œuvres de* BLAISE PASCAL, éd. Brunschvicg, Boutroux et Gazier, t. VIII (Paris, 1914), p. 197-199].

méthode de Fermat, il ne pouvait apparaître que comme un larcin fait au géomètre de Toulouse; celui-ci n'y est nommé, en effet, que comme un quelconque qui aurait proposé une application spéciale de la méthode.

Ajoutons à ce qui précède que le recueil de Hobbes, auquel nous empruntons l'écrit suivant, contient encore deux autres pièces importantes à l'égard de la publication de Descartes. La première est la rédaction originale par Debeaune de ses *Notes brieves sur la methode algebraïque de Mr Des Cartes* (1), reçues par le philosophe en Hollande au commencement de l'année 1639 et dont on ne connaît jusqu'à présent que la traduction latine publiée par Van Schooten en 1649 et en 1659 (2). La seconde pièce, intitulée *Recueil du Calcul qui sert à la Géométrie*, comprend les notes dressées par un gentilhomme de Hollande (Godefroi de Haestrecht ?) et envoyées par Descartes à Mersenne en mai et en juillet 1638 (3) dont M. Henri Adam, dans le *Bulletin* (2me série, t. XX, 1896), puis les éditeurs de Descartes à la fin du Tome X, ont publié une partie d'après une copie trouvée dans les papiers de Leibniz, à laquelle manque cependant toute la fin du travail (4).

---

(1) *Harleian ms* 6796, *art.* 23 (commencement : *L'algèbre spécieuse, c'est-à-dire qui s'explique par les espèces...*; fin : *... que par cette règle de Cardan*).

(2) Voir les *Œuvres de* Descartes, éd., cit., t. II, p. 499, 510, 523, 575 et surtout p. 579-580, t. V, p. 513. Dans ces Notes, Debeaune avait proposé pour sa première ligne, dont il y a été question plus haut, le problème *direct* des tangentes, comme on le voit aussi dans la traduction de Van Schooten, éd. de 1649, p. 146, et éd. de 1659, p. 131.

(3) *Œuvres de* Descartes, éd. cit., t. II, p. 152 et 246.

(4) Au-dessus du titre de la copie de Hobbes (*Harleian ms* 6796, *art.* 21) il y a écrit : *Mr de Cartes his Tract, sent me by Mersennus March* 1, 1640, de la main de Hobbes. A l'égard de cette indication, nous renvoyons, outre les lettres citées au bas de la page 660 du Tome X de l'édition des *Œuvres de* Descartes, plus spécialement à la lettre de Descartes à Mersenne, du 11 mars 1640 (t. III, p. 43) et à la lettre de Digby à Mersenne, du 15 mars 1640 (t. IV, p. 212). Il résulte de la dernière que Digby, et par lui sans doute Hobbes, reçut la copie, de la part de Mersenne, entre le 24 février et le 15 mars de l'année 1640.

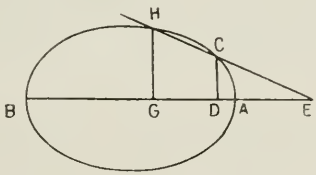
De la manière de trouver les tangentes des lignes courbes par l'Algèbre et des imperfections de celle du S. des C.

C[her] A[mi],

Pour te mieux faire connoistre les deffauts de la façon du S. des C. pour trouuer des lignes droites qui coupent les courbes données a angles droicts, je veux te monstrer l'artifice dont il est vraysemblable que Apollonius s'est seruy pour trouuer les tangentes des sections coniques, qui est general et qui peut estre employé à toutes sortes de lignes courbes sans aucune exception.

Soit vne Ellipse ACH et qu'il faille tirer vne ligne droite qui

Fig. 2.



la touche au poinct C. Tracez l'axe, ou vn autre diametre, comme AB et la ligne droite HCE, supposant seulement que le poinct H soit dans l'Ellipse avec les ordonnées CD, HG. D'autant que les lignes BD, DC, DA sont données, nous nommerons la premiere b, la seconde h et la troisiesme d. Et la ligne DE estant celle dont nous voulons chercher la mesure pour sçauoir par quel poinct du diametre BA doit passer la droicte qui touche l'Ellipse au poinct C, nous l'appellerons a, et la ligne DG o, pour la raison que je toucheray cy-apres.

De là il s'ensuit que le rectangle BDA est bd, le rectangle BGA $bd - do + ob - oo$. Et y ayant mesme proportion de DE à DC que de EG à GH, GH sera $\frac{oh + ah}{a}$. D'ailleurs y ayant aussy mesme proportion du rectangle BDA au rectangle BGA que du quarré de DC au quarré de HG par la 21 p. 1 d'Apollonius, le

quarré de HG sera

$$\left.\begin{array}{r} bd \\ -do \\ +bo \\ -oo \\ \hline bd \end{array}\right\} [\,hh\,] \text{ (1)}$$

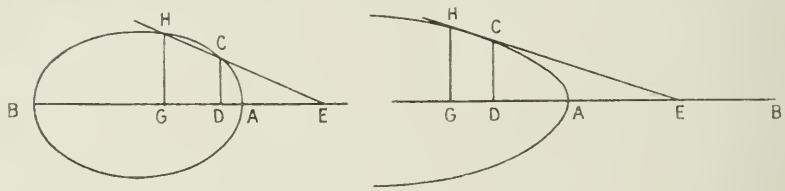
et par conséquent

$$\left.\begin{array}{r} bd \\ -do \\ +bo \\ -oo \\ \hline bd \end{array}\right\} [\,hh\,] \text{ (1)}$$

sera esgal au quarré de $\frac{oh - ah}{a}$.

Multipliant, diuisant et ostant les quantitez qui s'effacent

Fig. 3.



mutuellement en cette equation, $bdo + 2bda$, sera esgal a

$$-daa + aab - oaa.$$

Or si la ligne HCE touche l'ellipse au poinct C, il est nécessaire que la ligne GD soit o, c'est a dire nulle, auquel cas il est tres euident que toutes les quantitez qu'elle aura multipliées sont nulles, et que, si nous les ostez de la precedente equation, soit qu'elles soient marquées de l'vn ou l'autre signe, $+2bda$ demeurera esgal a $-daa + aab$, d'ou nous connoistrez que $\frac{2bd}{-d+b}$ est la valeur de a, et que, si BD moins DA est a DA comme 2BD à DE, ou bien si BD est a DA comme BE a AE, la droicte ECH touchera l'Ellipse en C ainsi que demonstre Apollonius 34 *p.* 1.

Si la ligne ACH est vne hyperbole on conclura auec la mesme facilité que $\frac{2bd}{+d-b}$ est la valeur d'a et que si BD plus DA est a DA

(1) Omission dans le *ms.*

[comme 2 BD à Dε, ou bien si BD est à DA](1) comme BE a AE. la ligne HCE touchera l'hyperbole au poinct C, comme prouve Apollonius en la mesme proposition.

Mais, si au lieu d'vne Ellipse ou d'vne hyperbole, vous conceuez que ACH soit vne ligne courbe dont la nature soit telle que les lignes DC, HG, *S*, *T*, *X*, *Z*, etc. y estant continuellement proportionnelles, le rectangle BDA soit au rectangle BGA comme DC a *T* ou comme DC a *X* ou bien comme DC a *Z*, si vous faictes la ligne DE de telle mesure que BD soit a DA comme BD plus DE, ou comme BD plus 2 DE, ou bien comme BD plus 3 DE etc. y est a AE, la ligne droite HEC touchera chacune de ces courbes. Et si on suppose que ACH soit vne parabole, on conclura par le mesme raisonnement que si DB est a DA comme DE a AE, la ligne HCE touchera la parabole au poinct C, qui est vne proposition qui n'est point dans Apollonius, et qui se peut aussy demonstrer facilement par la 2 *prop.* de ma *Parabolométrie* (2).

Si tu prens la peine de chercher les tangentes des mesmes lignes par l'inuention que le Sr des C. s'attribüe et qu'il dit n'estre pas vne des moindres de sa methode (3), il te sera facile de juger combien celle-cy est plus simple, facile et generale, et particulièrement si tu suppose que les ordonnées ne rencontrent pas leur diametre a angles droicts, comme il est necessaire en sa methode si on ne veut s'embarasser dans vn labyrinte dont l'issüe seroit extraordinairement difficile. C'est ce qui l'a obligé luy mesme, lorsqu'il a voulu pratiquer sa reigle en la ligne courbe, qu'il nomme *seconde parabole* (4), de conceuoir cette ligne comme engendrée par le mouuement d'vne parabole sur son axe et non sur vn diametre, qui est coupé obliquement par ses ordonnées.

Au lieu que par la methode precedente, vous trouuerez vn

---

(1) Omission dans le *ms.*

(2) Cet Ouvrage de Beaugrand, resté manuscrit, semble avoir traité des paraboles de degré supérieur, dont le concept était dû aussi à Fermat. Dans une lettre à Roberval, du 22 septembre 1636, Fermat fait mention spécialement de la parabole cubique en rappelant « que M. de Beaugrand, à qui j'en fis la proposition, l'appelle *parabole solide* » (*Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 73).

(3) *Géométrie*, éd. de 1637, p. 351.

(4) *Ibid.*, p. 337 et suiv., 343-344, 405 et suiv., et 412.

theoreme général suiuant lequel il vous sera facile de tirer vne ligne droite qui touche cette seconde parabole à vn poinct donné, en quelque façon qu'on se l'imagine auoir esté produite.

Soient les deux lignes droites AB, AX ([1]). Si la parabole KCH se meut tellement sur AX que celuy de ses diametres, qui est coupé par ses ordonnées a angles de mesme grandeur que l'angle BAX, ne s'en separe en façon quelconque, et si la ligne droite BL se meut circulairement a l'entour du poinct B, en sorte que le poinct L soit tousiours esgalement distant du poinct K, qui est le sommet de la parabole, la courbe, qui sera descrite par l'intersection de la ligne droite BL et de la parabolique KCH, sera celle que le S. DES C. nomme assez peu bien seconde parabole, pour ce que par la mesme raison il faudroit nommer l'hyperbole, c'est a dire vne ligne courbe, vne *seconde ligne droite*, attendu que si HCK estoit vne ligne droicte et non vne parabole, vous descririez par ce mouuement vne hyperbole.

Ne laissons pas de trouuer une ligne droite qui la touche au poinct C, pris ou il plaira.

Du poinct C et du poinct H, qu'il faut imaginer estre en la courbe HC, tirez parallelement à AX les droites HG, CD ([1]). Et nommez BA, b; AD, y; DC, x; KL, c; le costé droit de la parabole KCH, d; DE, a. D'autant que les quatre lignes BD, CD, CS, LS sont proportionnelles LS sera $\frac{xy}{b-y}$, SK $c+\frac{xy}{b-y}$, et le quarré de CB $cd+\frac{xyd}{b-y}$ d'où il s'ensuit que yy sera esgal a $cd+\frac{xyd}{b-y}$ et par consequent x, c'est a dire DC, sera

$$\frac{-yyy+yyb+ycd-cdb}{yd}.$$

Par le mesme raisonnement on monstre que HG est φ et pour ce que DE est à DC comme EG a GH, GH sera aussi x

$$\varphi\,\frac{\begin{array}{l}-yyy-3yyo-3yoo-ooo\\+yyb+2yob+oob\\-ycd+ocd\ \ -cdb\end{array}}{yd+od}\ \text{egal à}\ x\,\frac{\begin{array}{l}-yyy\\+byy\\+cdy\\-bcd\end{array}\Bigg\{a\ \begin{array}{l}-yyy\\+byy\\+cdy\\-bcd\end{array}}{dya}$$

Multipliant et diuisant les termes de l'Equation qui resulte de

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

ces deux valeurs de la ligne HG et ostant les quantitez qui s'effacent mutuellement

$$\left.\begin{array}{r} +2y'''a+yyao+yaoo \\ -yyab-yabo \end{array}\right\} \text{ sera egal à } \left\{\begin{array}{r} +y^{\text{IV}}-y'''b-yycd+ybcd+bcda \\ +y'''o-yybo-ycdo+bcdo \end{array}\right.$$

Après cette réduction et non deuant, effacez toutes les grandeurs que la quantité nulle, c['est] a d[ire] o, aura multipliée et vous apprendrez que

$$\frac{+y^{\text{IV}}-y'''b-yycd+ybcd}{-2y'''+yyb+bcd}$$

est la valeur de a, c'est à dire de DE, et par consequent, ayant l'autre poinct par ou la tangente de cette ligne courbe doit passer, il sera facile de la tracer (¹).

Tu voy que ie n'ay point supposé que l'angle BAX fust droict comme le S. DES C. et que la construction, qui se tire de cette analyse, a lieu lorsqu'il est oblique tout ainsy que quand il est droit. Je ne me suis point seruy non plus pour trouuer la valeur de la ligne DE d'autres equations que de la principale qui n'a pas monté iusques au sixiesme degré comme la sienne.

Mais ce n'est pas tout. Bien que l'on suppose que le diametre coupe ses ordonnées a angles droicts, le procédé de sa reigle ne laisse pas d'estre assez souuent si long et si penible, qu'il a faict perdre l'escrime au S^r DE BEAULNE, qui s'en vouloit seruir pour trouuer la tangente de la ligne courbe qui se descrit ainsy :

Prenez la ligne droite SAX (²) pour son axe, le poinct A pour son sommet, et dans la dicte ligne tel poinct qu'il vous plaira comme E. et ayant esleué la perpendiculaire EF, si vous la faictes esgale a la troisiesme proportionnelle aux lignes SE, AE, le poinct F sera dans la courbe. De mesme, si LM est perpendiculaire a AE et

(¹) Ce qui précède forme la première détermination que l'on connaisse, de la tangente à la parabole de Descartes par voie analytique. Entre les années 1637 et 1640, elle fut construite aussi par Roberval, au moyen de sa célèbre méthode mécanique: il écrivit à Fermat, le 4 août 1640, qu'il avait construit par ce moyen les tangentes « de toutes les courbes qui ont pu venir à ma connoissance ». On trouve exécutée sa construction dans l'exposé des *Observations* qui est imprimé dans les *Divers ouvrages de mathématique et de physique, par Messieurs de l'Académie royale des sciences* (Paris, Imprimerie royale, M.DCXCIII, p. 110-111).

(²) Le lecteur est prié de faire la figure.

troisiesme proportionnelle aux lignes SL, AL, le poinct M sera dans cette courbe, et ainsy vous trouuerez tous ses autres poincts.

Si vous desirez auoir vne ligne qui la touche au poinct F, tirez la ligne droite XFM, supposant que le poinct M soit en cette courbe et nommez AE, d; SA, b; SL, o; EX, e.

D'autant que par la construction de cette courbe SE, AE, EF sont en proportion continue, EF sera $\frac{dd}{+d+b}$ et pour la mesme raison LM sera $\frac{dd+2do+oo}{d+b+o}$, et les quatre lignes XE, XL, EF, LM estant proportionnelles,

$$\frac{dde+ddo}{d+b} \quad \text{sera esgal à} \quad \frac{dde+2doe+ooe}{d+b+o}.$$

Multipliant, diuisant et ostant toutes quantitez qui s'effacent mutuellement

$$dd[e]+deo+2dbe+obe \quad \text{sera esgal à} \quad ddd+bdd+odd.$$

Ostant tous les termes que la quantité nulle a multipliés, vous trouuerez que la valeur d'e, c'est a dire de XE, sera $\frac{dd+db}{d+2b}$. Et par consequent, si la droite AY est double de AS et XE de telle grandeur que YE soit a SA comme AE a AX, la droite XF touchera cette courbe en F, qui est la résolution que ie donnay audict S. de Beaulne sur cette question, de laquelle il mandoit auoir besoin dans quelque dessein touchant la Dioptrique.

Et ayant considéré la nature de cette ligne, i'ai remarqué [1] que ce n'estoit autre chose qu'vne hyperbole, dont le costé droit et le trauersant se trouuent en cette façon. Tirez YD perpendiculaire a YA et esgale a 2AY et tirez DAC et la droite YN perpendiculaire sur DA, AN sera le costé droit et AD le trauersant et les ordonnées comme FC, MG, seront toutes parallèles à AL.

Or afin que tu puisse pleinement considerer l'vsage de la quantité nulle que j'introduits en la recherche des tangentes, je ueux t'en donner encor vn exemple en la premiere conchoide de Nicomede puisque le S. des C. adnoüe [2] luy mesme que si on vouloit

---

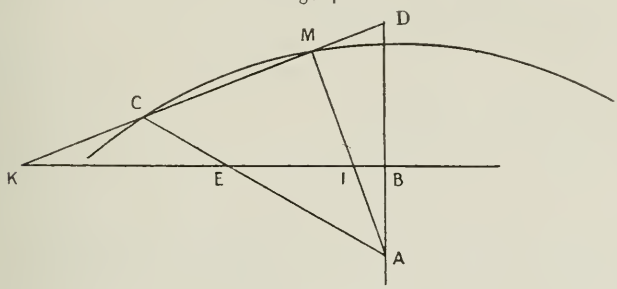
[1] Le manuscrit porte : *ie remarqué.*

[2] *Géometrie*, éd. de 1637, p. 351-352.

trouuer la tangente de cette ligne par la methode qu'il a expliquée, on s'engageroit dans vn calcul autant ou plus long que aucune de ceux qu'il a faicts auparavant.

Que les deux lignes BE, AD s'entrecoupent a angles droits, et prenez en l'vne des deux les poincts A, D, dont l'vn sera le Pole et l'autre le sommet de la courbe; et tirant du poinct A tant de droictes que l'on voudra comme AEC, AIM, si vous faictes CE,

Fig. 4.



IM esgales a BD, les poincts C, M seront dans la courbe. Pour trouuer suiuant quelles loix sa tangente, au poinct C par exemple, doit estre descrite, tirez KCM en sorte que le poinct K soit en la droite EB et le poinct M en la courbe, qu'il faut conceuoir au commencement estre different du poinct C.

Nommons AE, b; EC, d; BE, k; KE, a; EI, o. Le quarré de IA sera $bb - 2ko + oo$. Et d'autant que la raison de IK à KE est composée de la raison de IM (1) a MA et de la raison de AC à CE comme Ptolemée et Theon ont demonstré et moy en la 2 *prop.* de la *Geostatique* (2), et que les lignes IM, CE sont esgales, il y aura mesme proportion de IK à KE que de AC à MA, d'où il s'ensuit que MA sera $\frac{ab + ad}{a + o}$ et IA (3) $\frac{ba - do}{a + o}$ et par consequent,

$$+ bb - 2ko + oo \quad \text{sera esgal au quarré de} \quad \frac{ba - do}{a + o}.$$

(1) Le manuscrit portait d'abord *LM;* puis ces deux lettres sont barrées et il y a écrit en marge *IM*. En haut de cette page (fol. 160 verso) qui commence ici, on trouve une seconde figure identique à la précédente; nous avons cru inutile de la reproduire de nouveau.

(2) *Voir* pour cet Ouvrage ci-avant, p. 160.

(3) Ms d'abord *LA;* barré et en marge *JA*.

Multipliant, diuisant et ostant de cette equation les quantitez qui s'effacent mutuellement

$$\left.\begin{array}{l} +\ oaa + ooo \\ +\ 2abb + bbo \\ +\ 2aoo \end{array}\right\} \text{ sera esgal à } \left\{\begin{array}{l} +\ 2kaa \\ +\ 4kao - 2bad. \\ +\ [2]\ koo + ddo. \end{array}\right.$$

Et d'autant que, si la droicte KCM touche cette conchoïde, il est necessaire que EI soit nulle, ostez toutes les quantitez ou o se rencontre et puis vous connoistrez que la valeur de a est $\frac{bb + bd}{k}$ et par consequent, si EB est a AC comme AE a KE, la droicte KC touchera la conchoide DMC. Ou tu dois remarquer que la définition de tangente que donne Euclide au 3 *liure* des *Elemens*, ne peut conuenir à la tangente de la conchoïde dont il s'agist, pour ce qu'il n'y a que celle qui la touche au sommet, qui estant prolongée ne la touche point; toutes les autres la coupent ailleurs apres l'auoir touchée. Et je m'estonne que Ramus dans ces *Escholes mathematiques* (1) où il examine assez rigoureusement toutes les definitions et les autres propositions des *Elemens* n'ait dict aucune chose sur celle cy, pour ce que pour estre rendüe generale, il est besoin de la reformer en y adioustant quelque chose (2).

J'adjousterois les tangentes de la seconde conchoïde de Nicomede (3), la cissoide de Diocle et de plusieurs autres, mais c'est

---

(1) P. Rami *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta*. Basileæ, par Euseb. Episcopium et Nicolai fratris hæredes. Anno MDLXIX, in-4°, réimprimées Basileæ, 1578; Francofurti, 1579, et *Ibid.*, 1627.

(2) La construction de la tangente à la conchoïde de Nicomède fut proposée par Fermat à Roberval dans une lettre du 22 septembre 1636, à laquelle ce dernier répondit le 11 octobre entre autres que « il y a deux points en la conchoïde par lesquels on ne peut mener des tangentes », question qui fut traitée ultérieurement dans des lettres du 4 novembre, du 22 novembre et du 7 décembre 1636 (*Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 72, 82, 86-87, 91-92, et l'article cité ci-avant page 159, la note 4). Beaugrand ne semble pas avoir regardé les points d'inflexion. Ajoutons que Fermat, après avoir donné, dans sa lettre du 4 novembre 1636, seulement le résultat de la construction de la tangente par sa méthode, ne donne la solution complète que vers l'année 1640 (*Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. I, p. 161-162).

(3) Pour cette courbe, le problème fut proposé par Fermat à Roberval dans sa lettre du 16 décembre 1636 (*Œuvres de* Fermat, éd. cit., t. II, p. 94).

assez d'Algèbre pour vne fois. Au lieu de cela je te communiqueray la demonstration de la tangente de l'helice d'Archimede, *sine jnclinatione ad locum solidum*, que ie fis il y a quelque temps à la priere de M. Fermat, conseiller au parlement de Tholoze. Tu scay que Pappus au 4 *Liure* de ses *Collections* accuse Archimede d'en auoir faict la solution *ex jmproprio genere*, mais d'autant que toutes les propositions du liure περὶ ἑλικῶν sont en forme de theoremes, ie ne iuge pas que Pappus ait eu entièrement raison de le reprendre, non plus que Apollonius.

Je te prie de m'en dire ton aduis et de me croire tousjours

C[her] A[mi].

Ton tres humble seruiteur

UN THÉORÈME RELATIF A DEUX ELLIPSOÏDES CONFOCAUX ;

Par M. F. GONSETH.

1. Le théorème dont il s'agit présente quelque analogie, dans l'espace, avec un théorème très connu de Graves, dont voici l'énoncé :

Si un fil passé autour d'une ellipse est tendu par une pointe, celle-ci décrit une ellipse confocale à la première.

Le théorème analogue de l'espace sera le suivant :

Si d'un point P *on mène le cône tangent à un ellipsoïde, et qu'on calcule l'intégrale de la courbure moyenne sur la surface fermée convexe formée par le cône arrêté aux points de contact, et par la portion de l'ellipsoïde qui lui fait suite, cette intégrale reste constante si le point* P *décrit un ellipsoïde confocal au premier.*

J'exposerai la méthode de démonstration tout d'abord dans le cas du théorème de Graves.

2. Supposons qu'un ensemble E, à deux paramètres, de droites

nous soit donné; chacune d'elles a une équation de la forme

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0.$$

L'intégrale, étendue à toutes les valeurs (φ, p) de l'ensemble

$$M(E) = \int\int d\varphi\, dp,$$

est, d'après Crofton [1], la mesure de cet ensemble.

M. Polya [2] a montré que, entre toutes les mesures imaginables

$$M^* = \int\int f(\varphi, p)\, d\varphi\, dp$$

[où $f(\varphi, p)$ est une fonction arbitraire], la mesure de Crofton est univoquement déterminée par les trois conditions que voici :

I. Il existe des ensembles pour lesquels $M(E) > 0$; pour tout ensemble on doit avoir

$$M(E) \geqq 0.$$

II.

$$M(E_1 + E_2) = M(E_1) + M(E_2).$$

III. $M(E)$ est invariante pour tout mouvement du plan.

La première remarque à faire est que ces trois conditions sont aussi remplies par les intégrales définissant une aire, euclidienne ou non euclidienne [3] (en faisant d'ailleurs, pour la première condition, abstraction d'une constante du plan non euclidien, s'il y a lieu). Supposons que l'ensemble E soit celui des sécantes d'une courbe fermée convexe. La mesure $M(E)$ est alors aussi l'intégrale de la largeur de cette courbe; elle est par conséquent [4] égale au périmètre de cette dernière.

3. D'autre part, l'équation de toute droite de E aurait pu

---

(1) Crofton, *On the Theory of Local Probabilities* (*Philos. Trans.*, London, 1858, vol. 158).

(2) G. Polya, *Sitzungsberitche der Akad. der Wissenschaften, Wien*, Abg. IIa, Bd. 126, Heft 3.

(3) Les mouvements dont il s'agit dans la condition III sont alors naturellement entendus au sens non euclidien.

(4) H. Minkowski, *Œuvres complètes*, t. II; *Ueber die Körper konstanter Breite*, p. 278.

s'écrire

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Considérons l'ensemble des points de coordonnées rectangulaires

$$\text{(A)} \qquad x = u; \qquad y = v.$$

Les deux formules (A) effectuent une transformation *corrélative* du plan, qui transforme toute droite en un point; qui transforme la paire de points cycliques $u^2 + v^2 = 0$ dans la paire de droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0;$$

qui transforme enfin les mouvements du premier plan dans les mouvements (au sens non euclidien) d'un plan où la conique absolue est

$$x^2 + y^2 = 0.$$

De ce dernier fait, rapproché du fait, rappelé au n° 2, que la mesure de E est univoquement déterminée par les trois conditions citées, conditions auxquelles satisfait aussi une aire non euclidienne, il résulte que :

La mesure M(E) *est proportionnelle à l'aire de l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes* (u, v) *dans un plan non euclidien où la conique absolue est* $x^2 + y^2 = 0$.

C'est là la propriété dont nous allons faire application.

4. Considérons maintenant deux ellipses confocales E_1 et E_2. D'un point P de E_1 nous menons les tangentes a et b à E_2; la tangente t, en P, est bissectrice de l'angle (a, b) (*fig.* 1).

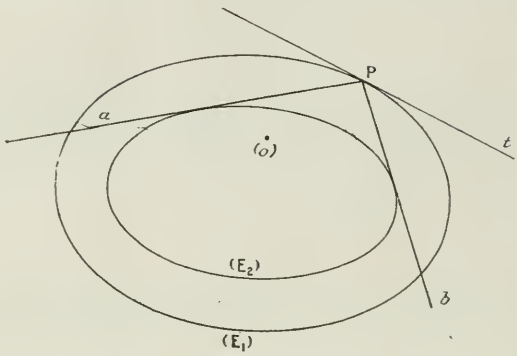
Appliquons à cette figure la transformation définie par les formules (A). Nous obtenons comme transformées deux coniques E'_1 et E'_2 qui ne sont *plus* confocales, mais qui sont dans un même faisceau *ponctuel* avec le cercle-point $x^2 + y^2 = 0$ (puisque les premières étaient dans un même faisceau *tangentiel* avec la paire ombilicale $u^2 + v^2 = 0$).

Aux tangentes a et b, par le point P de E_1, correspondent les points A et B, sur la tangente p à E'_1. Le point T, correspondant

à la bissectrice de $(a\ b)$, est au milieu de AB (au sens non euclidien) (*fig.* 2).

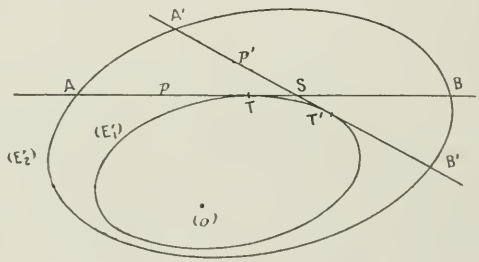
Pour démontrer maintenant que le fil tendu de P autour de E_2

Fig. 1.



a une longueur constante lorsque P décrit E_1, il faudrait faire voir que la mesure des droites qui le rencontrent est aussi constante; c'est-à-dire, d'après ce qui précède, que l'aire non euclidienne de la portion de plan située à l'extérieur de la courbe convexe fermée,

Fig. 2.



formée de p et de la portion de l'ellipse E'_1 qui contient O, l'est également. Dans ce but, menons une tangente p' très voisine de la précédente. En négligeant des infiniment petits du second ordre, nous pourrons supposer que le point S, intersection de p et p', est au milieu de AB et de A'B'. Les triangles infiniment petits SAA' et SBB' sont superposables; ce qui suffit pour que l'aire du segment détaché de E'_2 par p soit constante; ce qui enfin démontre le théorème de Graves.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (Émile). — Les Sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle. 1 brochure in-8 de 26 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1917.

Préface. — On se propose d'indiquer ici succinctement la part prise par la France dans le progrès des Sciences mathématiques pendant la seconde moitié du XIXe siècle et dans les premières années du siècle actuel, sans avoir la prétention de donner en quelques pages un tableau complet, et en laissant de côté des travaux trop récents, pour lesquels le recul paraît insuffisant.

Pendant la première moitié du XIXe siècle, les voies les plus fécondes avaient été ouvertes par Fourier, Cauchy et Galois. L'ouvrage de Fourier sur la théorie analytique de la chaleur est célèbre en Physique mathématique; il contient le germe des méthodes employées dans l'étude des équations différentielles auxquelles conduisent de nombreuses théories physiques, et les séries célèbres qui portent le nom de Fourier ont fait l'objet d'immenses généralisations. L'activité de Cauchy fut prodigieuse et s'étendit à tous les domaines des mathématiques pures et appliquées. Sa plus grande création fut celle de la théorie des fonctions de variables complexes; il a ainsi donné une vie nouvelle à l'Analyse mathématique, et, en ce sens, les travaux les plus modernes relèvent de lui. On doit les notions les plus essentielles sur la théorie des groupes à Evariste Galois, qui en a fait d'admirables applications à la théorie des équations algébriques et montra qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent les caractères essentiels de l'équation. D'ailleurs les notions introduites par Galois dépassent de beaucoup en réalité le domaine de l'Algèbre et s'étendent au concept de groupe d'opérations dans son acception la plus étendue. Si brève qu'ait été la vie de Galois, qui disparut à vingt ans dans une obscure querelle, il avait fait aussi en Analyse des découvertes capitales sur les intégrales de différentielles algébriques, comme le montre une lettre écrite la veille de sa mort.

Les trois grands noms que nous venons de citer sont représen-

tatifs des mentalités que l'on rencontre chez ceux qui cultivent les Sciences mathématiques.

Table des Matières. — I. Les fonctions analytiques. — II. Les équations différentielles. — III. Théorie des nombres ; Algèbre et Géométrie. — IV. Théorie des fonctions de variables réelles et des ensembles. — V. Quelques remarques finales.

D'OCAGNE (Maurice). — Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique. 2 vol. in-8°. Tome I [1] : *Transformations géométriques. Perspective. Géométrie infinitésimale. Géométrie réglée. Géométrie cinématique.* XII-375 pages avec 135 figures. Tome II : *Cinématique appliquée. Stéréotomie. Statique graphique. Calcul graphique. Calcul grapho-mécanique. Nomographie.* IV-364 pages avec 170 figures. Paris, Gauthier-Villars; 1918.

Le Tome II du *Cours de Géométrie* de M. d'Ocagne vient de paraître : il est consacré à celles des applications de la Géométrie qui intéressent la technique, et c'est sans doute la première fois que des notions d'une telle variété se trouvent groupées dans un même Ouvrage.

De cette variété, les titres des Chapitres font foi : *Cinématique appliquée; Stéréotomie; Statique graphique; Calcul graphique; Calcul grapho-mécanique; Nomographie*, tels sont les sujets qu'aborde l'auteur; mais la diversité des théories n'empêche pas l'unité profonde du livre : unité dans la méthode, puisque les mêmes disciplines géométriques en font la trame d'un bout à l'autre; unité dans le but, puisque, pour les problèmes traités, c'est toujours la recherche d'une solution graphique qui est l'objet final.

Le premier Chapitre, *Cinématique appliquée*, embrasse d'abord les principes géométriques de la *Théorie des mécanismes*, avec applications aux *transformateurs cinématiques :* engrenages, courbes roulantes, cames, excentriques, et aux *transformateurs géométriques :* bielle et manivelle, inverseurs, joints.

---

[1] Le Tome I a été analysé en 1917, p. 345.

Une seconde partie est consacrée à un sujet nouveau, que l'auteur appelle *Cinématique graphique,* et où le problème fondamental est la détermination des vitesses et des accélérations, à un instant donné, pour tous les points des systèmes *plans* en mouvement : comme la plupart des mécanismes usuels se ramènent à de tels systèmes, on comprend l'intérêt, à la fois théorique et pratique, de la solution.

Au cours du Chapitre, M. d'Ocagne fait un large emploi des propriétés établies dans la première partie de l'Ouvrage : on y trouve, par exemple, la solution *la plus générale* du problème des engrenages, déduite avec élégance des principes de la Géométrie cinématique, et aussi, sous une forme graphique simple et nouvelle, celle du problème des courbes roulantes.

La *Cinématique graphique* a été surtout l'œuvre du professeur anglais R.-H. Smith, et de l'ingénieur français Marbec ; mais, M. d'Ocagne en établit les principes d'une manière différente, en utilisant la notion de point double des similitudes, rencontrée dans son premier Volume, et il arrive ainsi à un mode d'exposition plus simple et plus direct. Après les généralités, il donne deux applications, qu'il pousse jusqu'au bout, à l'inverseur Peaucellier et au système bielle-manivelle.

La *Stéréotomie*, abordée dans le deuxième Chapitre, est réduite à quelques lignes essentielles. Après avoir traité des voûtes en berceau simples, M. d'Ocagne parle, avec plus de détail, des méthodes d'appareillage dans les arches biaises, en mettant toujours en relief les idées géométriques directrices ; il aborde ensuite les voûtes composées et les ouvrages tels que les trompes ou arrière-voussures, alliant sans cesse, aux résultats pratiques, des considérations géométriques intéressantes, de nature à guider le technicien et à rendre attrayants, pour le lecteur ordinaire, des sujets un peu austères par eux-mêmes.

Les quatre derniers Chapitres : *Statique graphique*, *Calcul graphique*, *Calcul grapho-mécanique* et *Nomographie*, embrassent l'ensemble des méthodes qui sont destinées à soulager l'effort des techniciens dans les nombreux calculs numériques auxquels les oblige la pratique. Ces méthodes sont nées des besoins quotidiens. Leur constitution définitive, sous forme de corps de doctrine, a été précédée d'une longue période de tâtonnements,

pendant laquelle les solutions particulières s'accumulaient au hasard des questions posées par les applications, sans que se dessinât nettement entre elles un lien théorique les rattachant à quelques principes simples.

Des phases analogues ont marqué l'histoire de la Géométrie descriptive : avant Monge, la Stéréotomie possédait presque autant de procédés qu'elle connaissait de problèmes, une recette spéciale existant pour chaque épure ; depuis Monge, elle est devenue une branche de la Géométrie descriptive, dont les méthodes générales ont remplacé ses procédés particuliers. Et les mêmes périodes se manifesteraient dans le développement de la Statique graphique, dans celui de l'intégration graphique ou de la Nomographie, qui n'ont été fondées définitivement qu'à partir des travaux de Culman, de Massau et de M. d'Ocagne lui-même.

Toute science appliquée repose ainsi sur quelques principes théoriques dont elle est l'efflorescence, et sans le soutien desquels elle se réduirait à un recueil de règles empiriques ; ce n'est qu'en étendant sa base qu'elle peut faire de nouveaux progrès, et dès lors, dans l'enseignement, la tâche du professeur consiste, avant tout, à mettre en évidence les principes directeurs, sans se perdre dans la multiplicité ou dans la minutie des applications, qu'il doit abandonner, pour la plupart, aux traités spéciaux.

C'est une telle initiation que M. d'Ocagne cherche à donner à ses élèves et à ses lecteurs ; il y a pleinement réussi.

En *Statique graphique*, l'auteur, après avoir établi les propriétés fondamentales des polygones dynamiques et funiculaires, en fait les applications classiques à la détermination des forces intérieures, des moments fléchissants et des efforts tranchants dans les cas usuels : systèmes réticulaires et pièces chargées ; il donne des notions sur le diagramme réciproque d'un système, et sur la liaison de cette théorie avec celle du complexe linéaire, exposée dans la première partie du Cours : soixante pages lui ont suffi pour le double exposé des principes et des applications, et il n'a rien omis d'essentiel, si bien qu'un lecteur qui l'a suivi attentivement peut aborder sans peine l'étude d'un traité complet de Statique graphique, tel que celui de Maurice Lévy.

Dans le Chapitre consacré au *Calcul graphique*, on traite successivement de la résolution graphique des systèmes d'équa-

tions linéaires, de celle des équations algébriques de tout degré, des quadratures graphiques, avec exemples utiles en Statique graphique (détermination des aires, des arcs, de leurs moments d'inertie, etc.); on expose enfin l'intégration graphique des équations différentielles du premier ordre.

Cette dernière théorie est due au savant ingénieur belge Massau dont les travaux d'initiateur n'étaient pas sans quelque complication ; M. d'Ocagne leur apporte une simplification notable, en utilisant, à côté des lignes *isoclines* de Massau, ce qu'il nomme la courbe *directrice de l'intégration;* la solution graphique finale est élégante et nette, et, chemin faisant, elle donne, sous une forme saisissante, la détermination des singularités des intégrales.

Le *Calcul grapho-mécanique* est l'ensemble des méthodes d'intégration qui reposent sur l'emploi d'instruments, au moyen desquels on opère sur certains tracés graphiques. Ces instruments sont classés par l'auteur en *intégromètres*, qui fournissent la valeur d'une intégrale définie, et en *intégraphes*, qui permettent le tracé de courbes représentatives d'une intégrale indéfinie ; tous reposent sur les propriétés de la roulette ou de la sphère roulante.

Après un exposé des principes géométriques et cinématiques qui sont à la base du calcul envisagé, M. d'Ocagne décrit les planimètres d'Amsler, de Petersen, de Prytz, de Marcel Deprez, l'analyseur harmonique d'Henrici ; puis, parmi les intégraphes, celui d'Abdank-Abakanowicz, aujourd'hui classique sous la forme que lui a donnée le constructeur Coradi, et les principaux appareils imaginés par le professeur E. Pascal : ces derniers conduisent à l'intégration de certaines équations différentielles usuelles, telles que celle de Riccati, celle du mouvement des projectiles, quand on se donne la courbe image de la résistance de l'air, celle du premier ordre la plus générale ou même l'équation *intégrale* de Volterra.

Dans son dernier Chapitre, l'auteur expose les principes et les applications principales de la *Nomographie*. Bien qu'il soit là, on peut le dire, sur son propre terrain, il ne consacre au sujet qu'une quarantaine de pages, dans lesquelles il résume, sans jamais sacrifier la clarté, les résultats les plus essentiels des travaux qu'il a consacrés à la question et qui semblent l'avoir épuisée.

L'exposé théorique est accompagné d'exemples particulièrement typiques, et complété par l'application générale de la *méthode des points alignés* aux problèmes de résolution des triangles sphériques, sous la forme même où ils se posent en Astronomie appliquée et en Navigation : on sait que cette élégante méthode est due à M. d'Ocagne, qui en a tiré un parti remarquable, non seulement dans le cas des équations à trois variables, mais dans des cas beaucoup plus généraux, qui comprennent presque tous ceux qu'introduit la pratique.

Le Tome II se termine enfin, comme le Tome I, par un appendice renfermant d'intéressants compléments : sur la description mécanique d'une courbe algébrique quelconque à l'aide de systèmes articulés, d'après le géomètre anglais Kempe ; sur un essai de constitution d'une Statique graphique *dans l'espace*, d'après le professeur suisse Mayor ; sur le planimètre hachette et son application, par l'ingénieur général Jacob, à l'intégration de l'équation de Riccati ; sur l'utilisation, enfin, de la Nomographie dans l'intégration graphique, proposée par M. Gercevanoff.

Ce résumé, nous l'espérons, suffira à montrer toute la richesse du second Volume de M. d'Ocagne : bien des mathématiciens, bien des géomètres même, seront surpris de voir à quelle variété d'applications se prêtent les principes de leur science, mais ils ne pourront qu'admirer la souplesse et l'élégance avec lesquelles ils sont mis en œuvre par l'auteur. On peut dire que, dans son enseignement, M. d'Ocagne est parvenu à introduire des *Éléments scientifiques* dans des domaines où il en existait à peine auparavant, et nous pensons ici, non seulement à la Nomographie, mais peut-être aussi à certaines parties du Calcul graphique ; enfin, nous devons ajouter que, malgré la variété des questions traitées, les exposés de l'auteur présentent un caractère commun nettement marqué, et qui dérive de cette qualité de concision géométrique que nous avons déjà signalée dans notre analyse du premier Volume.

G. Humbert.

LANCHESTER (F.-W.). — Le vol aérien. — Tome I : *Aérodynamique*, traduit de l'anglais sur la deuxième édition, par le Commandant C. Benoît. 1 vol. in-8 de XVI-512 pages, avec 162 figures et 1 planche. Paris, Gauthier-Villars; 1914. — Tome II : *Aérodonétique*, traduit de l'anglais sur la deuxième édition, par le Commandant C. Benoît. 1 volume in-8 de XVIII-478 pages, avec 208 figures et 1 planche. Paris, Gauthier-Villars; 1916.

Peu après l'apparition en Angleterre de l'Ouvrage de M. Lanchester, la librairie Gauthier-Villars vient d'offrir au public français une édition de ce travail, important par le sujet qu'il traite et par le nombre des idées neuves et originales qu'il renferme. Bien que tout dans l'exposition ne soit pas également à louer, cet Ouvrage est appelé à rendre de réels services, à cause du nombre des points de vue que le lecteur y découvrira, et des réflexions qu'il sera amené à entreprendre; il n'est pas exagéré de dire qu'un Livre qui remue beaucoup d'idées au moment opportun est un bon Livre, et d'excellent usage, même s'il n'apporte pas la solution définitive de toutes les questions qu'il pose.

L'Ouvrage en question est séparé en deux Parties : *Aérodynamique*, *Aérodonétique*. Le seul aspect, inhabituel, de ce dernier titre, nous avertit suffisamment que nous sommes en pays neuf. Il a semblé opportun à l'auteur, dans les jeunes théories concernant l'aviation (et paroisses joignantes) d'introduire un vocabulaire scientifique construit d'un bloc pour éviter les impropriétés de termes ou les appellations vagues qu'on a vu naître trop souvent en de telles occasions. Il n'y a pas de difficulté à admettre le nouveau glossaire que propose M. Lanchester; la construction des termes nouveaux y est en général logique et conforme aux bonnes habitudes étymologiques, qualité d'autant plus louable qu'elle n'appartient pas à bien des vocables de récente introduction. Peut-être trouvera-t-on cependant que l'auteur du présent Livre a un peu abusé, dans cet ordre d'idées, de sa puissance d'invention, et regrettera-t-on qu'il ait cru devoir détourner de leur signification courante certains mots devenus tellement usuels qu'il semble chimérique de tenter d'en déshabituer le public, scientifique ou non : c'est une entreprise peu aisée que de nous convaincre que dorénavant un aérodrome sera une machine volante, et non plus le terrain réservé aux expériences et exercices d'aviation (d'ailleurs

proprement δρόμος = action de courir, et non = celui qui court; d'où par extension : emplacement pour la course). Le terme *aérodone* n'est pas non plus très heureux; le verbe δονέω implique une idée d'agitation, de trouble, de ballottement qui n'est guère appropriée à un modèle glissant ou planant (*cf.* Homère, *Iliade*, XVII, 55 :

> . . . τὸ δέ τε πνοιαὶ δονέουσιν
> παντοίων ἀνέμων. . . .

Mais il n'y a évidemment pas lieu d'insister sur de telles critiques de détail.

Quoi qu'il en soit, l'*Aérodynamique* de M. Lanchester est l'étude de la sustentation des corps, et celle de la résistance qu'éprouve un corps à son mouvement dans un fluide. L'*Aérodonétique* est l'étude des formes des trajectoires naturelles du vol, des questions d'équilibre et de stabilité du vol.

La forme d'exposition adoptée évite systématiquement l'emploi des formules mathématiques. et même le plus souvent possible, l'emploi du langage mathématique. Le but ainsi poursuivi, qui est de rendre accessible l'ouvrage à un lecteur non mathématicien, je n'oserais m'avancer jusqu'à dire qu'il a été complètement atteint; était-il, du reste, entièrement désirable? Je sais bien que l'auteur fait état des lignes suivantes de Poynting et Thomson (*Sound*, Préface): « Même pour les lecteurs familiarisés avec les mathématiques, l'étude des méthodes élémentaires offre des avantages qui compensent leur forme gênante; elles mettent plus en lumière les points où l'on fait les diverses hypothèses, et rendent plus significatives les conditions sous lesquelles la théorie a sa valeur. » Encore que certaines réserves puissent être faites à cette manière de voir, je ne vois pas qu'elle légitime entièrement la méthode qui consiste à se priver, dans un Ouvrage d'enseignement, d'un langage précis dont la commodité compense amplement l'effort qu'exige son apprentissage. S'astreindre à formuler ses démonstrations et ses conclusions en langage non mathématique, c'est se condamner à être parfois obscur ou incomplet. Et s'il peut être utile à un chercheur d'exprimer, pour lui-même, sa pensée en langage courant, de façon à en extraire l'essentiel débarrassé de son enveloppe abstraite qui peut momentanément l'encombrer, est-on sûr que le lecteur, qui cherche à s'assimiler une théorie, tirera de ce procédé le même avantage? La longueur des explications,

qu'une simple formule, écrite à propos, rendrait superflues, ne risque-t-elle pas de disséminer l'attention sur des objets secondaires, sans pour cela rendre plus nets les résultats essentiels? Il pourra sembler que les lecteurs non initiés au langage mathématique, désireux de s'assimiler les principes de la science du vol mécanique, agiraient prudemment en acquérant d'abord la science du calcul, additionnée de quelques notions de mécanique, s'ils prétendent tirer du Livre de M. Lanchester autre chose que des idées vagues.

Fort heureusement, l'auteur n'a pas par trop strictement appliqué cette réserve concernant les formules; et aussi bien n'eût-il pu le faire qu'en réduisant son Ouvrage à des considérations peu solides. Mais pour être conforme à la vérité, il faut dire que dans certains Chapitres, où l'absence du secours mathématique est la plus frappante, l'intérêt de l'Ouvrage est très notablement ralenti; du reste la qualité de la traduction tend à s'en ressentir un peu trop. L'exposition est en général claire, d'allure rapide, dans la plus grande partie, mais il semble que la partie théorique (surtout, dans le premier Volume, l'exposé des principes d'Hydrodynamique indispensables) ne possède pas la même vie et le même intérêt; l'œuvre du traducteur laisse en cette partie visiblement à désirer; il est fâcheux de rencontrer des phrases telles que les suivantes : « Les conditions exigent que le champ soit constitué de lignes droites radiales également réparties dans l'espace sur une circonférence. » (I, p. 99.) « Nous pouvons regarder le procédé comme équivalent à un certain nombre de sources et de puits. » (p. 124.) « Le corps oscillera autour de cet aspect d'équilibre naturel, — avec cette note au bas de la page : par aspect, l'auteur entend la projection sur un plan » (p. 140.) Ces passages malencontreux proviennent d'une traduction un peu trop littérale et hâtive.

Mais il n'y a pas lieu d'insister sur ces petits défauts accessoires, et il faut dire, après ces quelques légères observations, tout le mérite de l'œuvre, et le gré qu'il faut savoir à M. Benoît de son utile traduction (excellente presque partout).

Les premiers Chapitres de l'Ouvrage nous décrivent les essais d'explications donnés depuis Newton, des phénomènes de résistance dans les fluides : recherches classiques de Rankine, Kirchhoff, Helmholtz; la nécessité d'admettre l'existence de

surfaces de discontinuités dans les mouvements réels est indiquée avec une grande clarté.

En quelle proportion la résistance est-elle due à la viscosité et au frottement? Une théorie approchée, où la résistance directe est trouvée proportionnelle à la vitesse V (Stokes) ou à $V^{1,5}$ (Allen) ou à V^2 (Newton) est discutée qualitativement par le secours des équations aux dimensions (expériences de Froude, Allen, Dines, etc.).

On trouve des bases plus solides dans les théories d'Hydrodynamique qui sont ensuite exposées, avec les principales propriétés des potentiels, fonctions de courant, circulations, tourbillons. Ici, malgré la très réelle élégance avec laquelle ces résultats classiques nous sont présentés, l'absence de démonstrations mathématiques complètes cause un inconvénient sur lequel je ne reviendrai pas. Suit un historique de l'introduction des mouvements discontinus, et une discussion, tout à fait remarquable, des objections que Lord Kelvin a faites à cette théorie, objections qui doivent, pour de sérieuses raisons, être écartées.

Les Chapitres suivants, et qui sont presque entièrement originaux, sont d'un tout autre caractère : les raisonnements, basés plutôt sur l'expérience et sur une traduction un peu libre des théories mathématiques, tendent à nous décrire les mouvements de l'air dans le voisinage d'un planeur en forme d'aile (aérophylle). La figure schématique formée d'un anneau tourbillon, ou d'un demi-anneau chargé en son sommet par l'aérophylle, et mobile en conservant son énergie indéfiniment, résume les vues, sans doute hardies, de l'auteur sur la sustentation du planeur dans un fluide très peu visqueux. Pour le cas du fluide réel, cela permet d'imaginer un passage aux surfaces de discontinuité résolues en surfaces de tourbillons d'Helmholtz.

Nous trouvons ensuite le résumé des expériences concernant la résistance du plan, normal ou oblique au courant fluide; puis une théorie élémentaire de l'aéroplane, avec d'ingénieuses considérations sur la forme, le poids, la voilure. Enfin, un intéressant Chapitre d'Aérodynamique expérimentale termine le Volume. Signalons les quelques Notes additionnelles, spécialement celle sur la transmission des quantités de mouvement, où le lecteur trouvera matière

à de profitables méditations sur les principes essentiels des applications mécaniques.

Le second Volume (*Aérodonétique*) aborde la question de la sustentation et du mouvement de l'aérodone. En voici le plan général : équilibre et stabilité de l'aérodone, étude analytique de la trajectoire du vol, en supposant l'appareil libre de se mouvoir de façon que son axe longitudinal ne quitte pas le plan vertical où il se trouve initialement ; on admet que l'aérodone ne perd pas d'énergie pendant le vol (par exemple, une force de propulsion interne équilibre exactement, à tout moment, la résistance qu'éprouve l'appareil). On admet encore que la masse de l'appareil est concentrée en son centre de gravité, et que les dimensions en jeu sont faibles par rapport au rayon de courbure de la trajectoire. On définit alors « la courbe du vol », et le tracé effectif de cette courbe permet d'aborder de suite la discussion de certains problèmes : stabilité longitudinale, effet des coups de vent.

Si l'on fait intervenir maintenant la résistance et le moment d'inertie, exclus tout d'abord, la théorie se complique un peu. L'effet de la résistance est, en gros, d'amortir les oscillations, et l'effet du moment d'inertie est plutôt inverse. Pour de petites amplitudes, ces deux influences peuvent se neutraliser de façon à ne pas modifier sensiblement la courbe du vol. On peut établir une équation de stabilité, qui définit les conditions de permanence de la trajectoire. L'auteur nous décrit toute une série d'expériences qu'il a entreprises lui-même pour la vérification des résultats indiqués. Les vérifications ont une allure excellente.

Après ces théories générales, la stabilité de rotation (stabilité latérale et stabilité de direction) est étudiée à part, et l'on trouve les conditions nécessaires de cette stabilité. Suit un fort attachant essai d'Aérodonétique expérimentale.

Telles sont, en un résumé trop succinct, les principales questions traitées par l'auteur. Il faut mettre tout à fait à part la théorie du vol à voile, qui forme une partie importante de l'Ouvrage. On sait qu'on désigne sous cette dénomination le mode de vol qu'on observe chez les oiseaux plangeurs, qui, par temps de vent, semblent glisser, à altitude constante, ou même à altitude croissante, pendant un temps indéfini, et cela sans battement d'aile ni

mouvement (visible) quelconque; cela constitue une contradiction apparente avec ce fait que, dans les conditions normales, l'énergie nécessaire à la continuation du vol provient de la descente du corps sous l'action de la pesanteur. Il faut recommander la lecture de ce Chapitre, où l'on trouvera la discussion de diverses hypothèses présentées pour expliquer l'apparent paradoxe, et des conclusions finales qui paraissent assez plausibles.

Quelques Notes terminent ce second Volume. Signalons spécialement la Note sur le gyroscope, sur la dérive des projectiles et sur le boomerang australien (dont on connaît les singulières propriétés, qui trouvent une explication qualitative dans un effet gyroscopique). Ces paragraphes seront lus avec intérêt par tous ceux qui s'intéressent à la Mécanique appliquée. Si sur quelques points les vues de l'auteur peuvent être contestées, elles sont toujours empreintes d'originalité et d'un grand sens pratique. Voici, par exemple, un point où je me permettrai une légère réflexion : l'auteur indique (II, p. 420) comme un fait «bien connu» que l'axe d'un projectile lancé par une arme rayée est, à chaque instant du mouvement, dirigé suivant la tangente à la trajectoire du centre de gravité. Non seulement ce fait n'est pas bien connu, ni même, si je ne me trompe, généralement admis, mais il y a des chances qu'il soit inexact. Si, en effet, l'axe du projectile se trouve, au début, dans une direction tangente à la trajectoire du centre de gravité, comme cette trajectoire est concave vers le bas du fait de la pensanteur, l'air tendra à développer une résistance qui n'aura généralement aucune raison de passer par le centre de gravité, et qui motivera une précession (vers la droite si le point d'application de cette résistance est en avant), ce qui laisse quelque doute sur le fait énoncé ci-dessus.

En résumé, ces deux intéressants Volumes prendront, dans la bibliothèque de nos étudiants, une place honorable à côté des exposés classiques de MM. Painlevé et Borel, Soreau, Marchis, etc. concernant l'aviation, et sont sans nul doute appelés à rendre d'utiles services.

H. Villat.

MÉLANGES.

UN THÉORÈME RELATIF A DEUX ELLIPSOÏDES CONFOCAUX;

PAR M. F. GONSETH.

(*Suite et fin.*)

5. La démonstration du théorème analogue dans l'espace est semblable à la précédente. Un plan quelconque, d'un ensemble E à trois paramètres, a l'équation normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

La *mesure* de cet ensemble est définie par l'intégrale

$$M(E) = \int\int\int dw\, dp$$

(où dw est l'élément de surface de la sphère unité).

Comme dans le cas du plan, cette mesure est univoquement déterminée par les trois conditions citées plus haut [1].

En particulier, *l'ensemble des plans qui rencontrent une surface convexe fermée* a pour mesure *l'intégrale de la largeur* de cette surface, c'est-à-dire, d'après une formule de Minkowski [2], *l'intégrale de la courbure moyenne* sur cette surface.

Si, d'autre part, on avait écrit l'équation du plan précédent

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

les points de coordonnées cartésiennes

$$\text{(B)} \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = w$$

formeraient un ensemble qui, pour des raisons analogues à celles

---

(1) G. POLYA, *loc. cit.*

(2) A. HURWITZ, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier* (*Annales de l'École Normale*, vol. XIX, 1902, p. 405), ou bien H. MINKOWSKI, *Œuvres complètes*, t. II; *Volumen und Oberfläche*, p. 241.

que nous avons invoquées au n° 3, jouirait de la propriété suivante :

La mesure d'un ensemble de plans de coordonnées pluckériennes (u, v, w) *est égale au volume* (*au sens non euclidien*) *de l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes* (u, v, w), *dans un espace non euclidien dont la quadrique absolue est la sphère-point*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

6. Il est à peine nécessaire de terminer la démonstration, qui se calque dès ici sur la précédente.

Soient Q_1 et Q_2 deux ellipsoïdes confocaux. D'un point P de l'ellipsoïde extérieur Q_1 menons le cône tangent γ à Q_2. Le plan tangent τ à Q_1, en P, fait deux angles égaux avec les deux plans tangents menés à γ par toute droite qui touche Q_1 au même point P. Transformons cette figure, par la transformation corrélative définie par les formules (B).

Nous obtenons comme transformées deux ellipsoïdes Q'_1 et Q'_2 qui ne sont plus confocaux, mais qui se trouvent dans un même faisceau ponctuel avec la sphère-point $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Au point P correspond un plan π, tangent à Q'_1, qui touche cette dernière en T, et qui coupe Q'_2 suivant une conique C.

Toute tangente à Q'_1, dans le plan π, coupe C en deux points, dont le milieu (au sens non euclidien) est le point de contact.

La démonstration consistera maintenant à faire voir que le volume non euclidien de l'espace situé à l'extérieur de la surface fermée, formée par le plan π à l'intérieur de la conique C, et par la portion de l'ellipsoïde Q'_2 qui contient le centre de la transformation O, est constant.

Dans ce but, on mènera deux plans tangents à Q'_1, voisins de π. Ces deux plans et ce dernier détermineront un trièdre, de sommet S, dont les arêtes couperont Q'_2 en A et B, A′ et B′, A″ et B″. En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, on pourra admettre que S est au milieu (non euclidien) des segments AB, A′B′ et A″B″. Les trièdres infiniment petits SAA′A″ et SBB′B″ auront un volume égal; ce qui suffira pour que le segment détaché de Q'_2 ait un volume constant, et ce qui démontrera le théorème.

SUR L'ADDITION DES NOYAUX NON ORTHOGONAUX;

PAR M. TR. LALESCO.

Lorsque deux noyaux $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont orthogonaux, un théorème de MM. Goursat et Heywood établit la relation très simple qui existe entre les fonctions $D(\lambda)$ relatives à ces noyaux d'un côté, et entre la même fonction de Fredholm relative au noyau somme $P(x, y) + Q(x, y) = N(x, y)$. On sait que, dans ce cas, on a

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \times D_Q(\lambda).$$

Lorsque les noyaux $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ne sont plus orthogonaux, la relation est loin d'être aussi simple. Dans cette Note, nous nous proposons d'établir, sous une forme symétrique, la relation dans le cas général. Nous signalons, comme application, une autre formule, utile dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini, et que nous avions déjà obtenue antérieurement par une voie toute différente [1].

Considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_a^b [\lambda P(x, s) + \mu Q(x, s)]\, \varphi(s)\, ds = f(x),$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ désignent deux noyaux non orthogonaux, λ et μ deux paramètres arbitraires.

Posons

$$N(x, y) = \lambda P(x, y) + \mu Q(x, y).$$

On a

$$\int_a^b N\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n$$
$$= \int_a^b \begin{vmatrix} \lambda P(s_1, s_1) + \mu Q(s_1, s_1) & \ldots & \lambda P(s_1, s_n) + \mu Q(s_1, s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda P(s_n, s_1) + \mu Q(s_n, s_1) & \ldots & \lambda P(s_n, s_n) + \mu Q(s_n, s_n) \end{vmatrix} ds_1 \ldots ds_n,$$

[1] *Sur l'addition des noyaux non orthogonaux* (*Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*, 1914).

d'où l'on déduit immédiatement

$$(1)\quad \int_a^b N\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n$$
$$= \lambda^n \int_a^b K_0\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n + C_n^1 \lambda^{n-1} \mu \int_a^b K_1\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n + \ldots$$
$$+ C_n^p \lambda^{n-p} \mu^p \int_a^b K_p\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} ds \ldots ds_n + \ldots + \mu^n \int_a^b K_n\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n,$$

en posant

$$K_p\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} Q(s_1 s_1) & \ldots & Q(s_1 s_n) \\ Q(s_2 s_1) & \ldots & Q(s_2 s_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Q(s_p s_1) & \ldots & Q(s_p s_n) \\ P(s_{p+1} s_1) & \ldots & P(s_{p+1} s_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ P(s_n s_1) & \ldots & P(s_n s_n) \end{vmatrix}.$$

On en déduit l'expression suivante de $D(\lambda, \mu)$:

$$(2)\qquad D(\lambda, \mu) = 1 + \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \frac{\mu^q}{q!} \int_a^b K_q\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_{p+q} \\ s_1 \ldots s_{p+q} \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_{p+q}.$$

Nous nous proposons maintenant de transformer cette formule dans une autre qui contienne $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sous une forme symétrique.

Pour cela, développons le déterminant $K_q\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{p+q} \\ x_1 \ldots x_{p+q} \end{pmatrix}$ suivant les mineurs d'ordre q formés par ses q premières lignes. On a

$$(3)\quad K_q\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_{p+q} \\ x_1 \ldots x_{p+q} \end{pmatrix}$$
$$= \sum (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q} Q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_q \\ x_{\alpha_1} & x_{\alpha_2} & \ldots x_{\alpha_q} \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} x_{q+1} \ldots x_{q+p} \\ x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_p} \end{pmatrix},$$

la somme $\sum$ du second membre étant étendue à toutes les permutations $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q \beta_1 \ldots \beta_p)$ des $p+q$ premiers nombres entiers, à condition toutefois que $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ et $\beta_{j+1} > \beta_j$.

Pour préparer cette formule en vue de l'intégration par rapport à toutes les lettres qui figurent dans son expression, nous considérons en bloc le groupe des termes dans lesquels parmi les

lettres x_{α_i} il en existe r ($q = r + k$) qui se trouvent aussi dans la ligne supérieure $x_1 \ldots x_p$. A cause de la condition $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, ces lettres sont nécessairement les r premières

$$x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} x_{\alpha_r}.$$

Faisons alors, dans la ligne supérieure, les transpositions nécessaires pour amener ces lettres aussi au commencement de la ligne. On obtient

$$Q\begin{pmatrix} x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_r} & x_{\beta_1} & \ldots x_{\beta_k} \\ x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_r} & x_{\alpha_{r+1}} \ldots & x_{\alpha_q} \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r} Q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_q \\ x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} & \ldots & x_{\alpha_q} \end{pmatrix}.$$

Les k lettres qui suivent x_{α_r} sont, nécessairement, les k premières lettres x_β, à cause de l'inégalité $\beta_{j+1} > \beta_j$.

D'une manière analogue, ramenons les lettres x_α qui figurent dans la ligne supérieure de P, à son commencement. On obtient

$$\begin{aligned} &P\begin{pmatrix} x_{\alpha_{r+1}} \ldots x_{\alpha_q} & x_{\beta_{k+1}} \ldots x_{p+q} \\ x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_k} & x_{\beta_{k+1}} \ldots x_{p+q} \end{pmatrix} \\ &\quad = (-1)^{qk + \frac{k(k+1)}{2}} (-1)^{\alpha_{r+1} + \ldots + \alpha_q} P\begin{pmatrix} x_{q+1} \ldots x_{q+p} \\ x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Changeons les notations, pour mettre bien en évidence le résultat obtenu. Le terme général considéré peut s'écrire maintenant

$$(-1)^A P\begin{pmatrix} s_1 \ldots s_r & x_1 x_2 \ldots x_k \\ s_1 \ldots s_r & y_1 y_2 \ldots y_k \end{pmatrix} Q\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_k & t_1 t_2 \ldots t_l \\ x_1 x_2 \ldots x_k & t_1 t_2 \ldots t_l \end{pmatrix}$$

en posant

$$A = \frac{q(q+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + kq$$

et

$$p = k + l.$$

L'exposant A ne dépend plus de la permutation des lettres α et β; on a de plus

$$A \equiv k \pmod 2,$$

en tenant compte de la relation $q = k + r$.

Après intégration par rapport à toutes ses variables, le terme

général considéré devient

$$(4)\quad (-1)^k \int_a^b \mathrm{P}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k & s_1 \dots s_r \\ y_1 \dots y_k & s_1 \dots s_r \end{pmatrix}$$
$$\times \mathrm{Q}\begin{pmatrix} y_1 \dots y_k & t_1 \dots t_l \\ x_1 \dots x_k & t_1 \dots t_l \end{pmatrix} d(s_1 \dots s_r)\, d(t_1 \dots t_l)\, d(x_1 y_1) \dots d(x_k y_k).$$

Cette expression nous montre que chaque terme du groupe global que nous avons considéré donnera, après intégration, la même valeur; il nous suffira donc de chercher le nombre de ces termes. Or celui-ci est évidemment égal à

$$\mathrm{C}_p^r\, \mathrm{C}_k^q.$$

Le coefficient de l'expression (4) dans la formule (2) sera dès lors

$$\frac{\lambda^p}{p!}\,\frac{\mu^q}{q!}\,\frac{p!}{r!\,k!}\,\frac{q!}{k!\,l!} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\mu^k}{k!}\,\frac{\lambda^r}{r!}\,\frac{\mu^l}{l!}.$$

En groupant ensemble les termes qui correspondent à la même valeur de k, on obtient ainsi la formule

$$(5)\quad \mathrm{D}(\lambda, \mu) = \mathrm{D}_\mathrm{P}(\lambda)\, \mathrm{D}_\mathrm{Q}(\mu) + \dots$$
$$+ (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\mu^k}{k!} \int_a^b \mathrm{D}_\mathrm{P}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k & \\ y_1 \dots y_k & \lambda \end{pmatrix} \mathrm{D}_\mathrm{Q}\begin{pmatrix} y_1 \dots y_k & \\ x_1 \dots x_k & \mu \end{pmatrix} d(x_1 y_1) \dots d(x_k y_k) + \dots,$$

que nous voulions établir. On y remarquera la forme symétrique sous laquelle se présentent les mineurs de Fredholm.

Pour donner immédiatement une application de cette formule, considérons le cas particulier

$$\mathrm{Q}(x, y) = f(x)\, g(y),$$

et posons $\lambda = \mu$. On a

$$\mathrm{D}_\mathrm{Q}(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds,$$

$$\mathrm{D}_\mathrm{Q}\begin{pmatrix} x & \\ y & \lambda \end{pmatrix} = f(x)\, g(y),$$

$$\mathrm{D}_\mathrm{Q}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k & \\ y_1 \dots y_k & \lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{pour} \qquad k > 1.$$

La formule (5) se réduit à

$$D_P(\lambda)\left[1+\lambda\int_a^b f(s)\,g(s)\,ds\right]-\lambda^2\int_a^b D_P\begin{pmatrix} s & \\ & \lambda \\ t & \end{pmatrix} g(s)\,f(t)\,ds\,dt=0.$$

Les valeurs caractéristiques du noyau

$$N(x,y)=P(x,y)+f(x)\,g(y)$$

sont donc les zéros de la fonction méromorphe

$$(6)\qquad 1+\lambda\int_a^b f(s)\,g(s)\,ds+\lambda^2\int g(s)\,\mathfrak{P}(s,t,\lambda)\,f(t)\,ds\,dt=0,$$

en se rappelant que

$$\mathfrak{P}(x,y,\lambda)=-\frac{D_P\begin{pmatrix} x & \\ & \lambda \\ y & \end{pmatrix}}{D_P(\lambda)}.$$

L'équation (6) est du type

$$\operatorname{tang} x=x$$

et permet d'établir simplement les relations d'inégalité et asymptotiques entre les valeurs caractéristiques des noyaux $N(x,y)$ et $P(x,y)$.

SUR LES SOMMES ABÉLIENNES DE VOLUMES CYCLIDO-CONIQUES;

PAR M. A. BUHL.

[*Seconde Note* (1).]

1. La somme des volumes limités, dans un cône quelconque, par différentes cloisons appartenant à une même surface algébrique, semble prendre une importance particulière.

Au point de vue analytique, toute somme abélienne de même cône peut être facilement étudiée comme somme de volumes; quant à l'expression de telles sommes sous la forme finale d'une

(1) Voir *Bull. des Sc.*, t. XLI, 1917.

intégrale de ligne à constitution rationnelle, elle est subordonnée au fait, pour certaines intégrales doubles rationnelles, en x et y seulement, d'être des intégrales *de seconde espèce*, complètement étudiées par M. Émile Picard. C'est ce que j'ai brièvement indiqué, en deux Notes des *Comptes rendus* (28 janvier et 11 février 1918).

Au point de vue géométrique, si nous reprenons la surface algébrique

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 = 0 \tag{1}$$

et la somme

$$\sum \tau_i = \int\int_\sigma \left(-\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma, \tag{2}$$

telle qu'elle a été définie dans la première Note publiée ici, nous pouvons dire qu'il y a, en (2), une étude à rapprocher de celle du cône des directions asymptotiques de (1). Ce dernier cône ne dépend que du premier terme de (1); la somme (2) dépend des quatre premiers termes. Mais cette différence montre toute la variété qui tournera à l'avantage de la seconde étude.

Dans ce qui suit, on trouvera notamment un théorème des plus élégants concernant la cyclide de Dupin définie comme elle l'a été par Gaston Darboux dans ses *Principes de Géométrie analytique* (Livre V, Chap. III).

Viennent ensuite quelques remarques générales sur des cyclides ou même des surfaces algébriques quelconques. Remarquons que lorsque (1) peut être rapportée à un *centre* (au sens général du mot), on a

$$\varphi_{m-1} = 0, \qquad \sum \tau_i = -\int\int_\sigma \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma.$$

La somme abélienne (2), *qui appartient à* (1), *appartient aussi à la surface à centre, d'ordre* $3m$,

$$3\varphi_m^3 + \star_{3m-1} + \theta_{3m-2} - (\varphi_{m-1}^3 - 3\varphi_m\varphi_{m-1}\varphi_{m-2} + 3\varphi_m^2\varphi_{m-3}) + \theta_{3m-4} + \ldots = 0.$$

Ce théorème est d'une vérification immédiate.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TYCHONIS BRAHE DANI SCRIPTA ASTRONOMICA, *edidit* J.-L.-E. DREYER *auxilio Joannis Rœder, sumptus fecit* G.-A. HAGEMANN. Auspiciis Societatis linguæ et litterarum danicarum. Tomus I-III, 3 vol. in-4°, LIX, 320, 461 et 417 pages. Hauniæ, in libraria Gyldendaliana; 1913, 1915, 1916.

Pendant que les Œuvres de Kepler et de Galilée ont été publiées en de grandes éditions nationales, une partie des écrits de Tycho sont encore inédits et d'autres n'existent qu'à un petit nombre d'exemplaires et sont très difficilement accessibles. L'œuvre de Tycho a pourtant inauguré l'Astronomie moderne et elle mérite bien d'être connue en tous ses détails. Son Ouvrage le plus important, l'*Astronomiæ instauratæ Progymnasmata*, fut publié immédiatement après sa mort par les soins de Kepler. Ce grand astronome a été pour ainsi dire l'héritier de Tycho. Une mort prématurée n'a pas permis à Tycho de tirer tout le parti possible de ses observations. Il échut à Kepler de recueillir le trésor qui était renfermé dans la grande collection d'observations qu'il hérita de Tycho. C'est, en effet, grâce à ces observations qu'il trouva les lois immortelles qui portent son nom.

Kepler avait l'intention de publier les observations originales de Tycho, mais ce plan ne fut pas réalisé. Son fils, le médecin Ludwig Kepler, vendit les manuscrits de Tycho au roi de Danemark, Frédéric III, qui décida de les publier. Il confia cette tâche au mathématicien Rasmus Bartholin qui se mit immédiatement à l'œuvre. Mais quand une grande partie des préparations était faite le roi mourut et le plan échoua. L'année suivante (1671) l'Académie des Sciences envoya un de ses membres, Jean Picard, à Copenhague pour déterminer la longitude et la latitude des deux observatoires de Tycho qui étaient situés dans l'île de Hveen. Picard remporta de Copenhague la copie que Bartholin avait prise des manuscrits de Tycho pour la faire imprimer à Paris. L'impression fut commencée, mais une fois encore le travail s'arrêta faute d'argent.

La Société de la langue et de la littérature danoise a maintenant

pris l'initiative de la publication des Œuvres complètes de l'illustre astronome danois. Elle a eu l'heureuse fortune de pouvoir confier cette publication à l'éminent biographe [1] de Tycho, M. Dreyer, directeur de l'Observatoire d'Armagh, en Irlande. Les trois Tomes qui viennent de paraître, témoignent hautement que M. Dreyer possède toutes les qualités nécessaires pour s'acquitter de cette tâche difficile d'une excellente manière.

L'Ouvrage sera complet en 13 Tomes. Voici un abrégé de la Table des Matières :

TOMUS I.

Prolegomena.
De nova Stella (1573).
Appendices ad librum De nova Stella pertinentes (inédites).
De disciplinis mathematicis Oratio (1574).
Astrologiæ meteorologicæ fragmentum.
Horoscopus Principis Christiani (1577) (inédit).
Horoscopus Principis Huldarici (1579) (inédit).
Horoscopus Principis Johannis (1583) (inédit).
Triangulorum Planorum et Sphæricorum Praxis arithmetica (1591).
De Triangulis Sphæricis et Planis (1599) (inédit).
Annotationes Editoris.

TOMUS II.

Astronomiæ instauratæ Progymnasmatum partes prima et secunda.

TOMUS III.

Astronomiæ instauratæ Progymnasmatum pars tertia.
Stellarum inerrantium Restitutio (1598).
Stellarum inerrantium Restitutionis Appendix (inédit).

TOMUS IV.

De mundi ætherei recentioribus Phænomenis.
Libellus de cometa anni 1577 (inédit).
Apologetica responsio de Parallaxi cometarum (Ouvrage qu'on a considéré jusqu'ici comme perdu).
Craigii responsio (inédite).

TOMUS V.

Astronomiæ instauratæ mechanica.

---

[1] Pour ce qui concerne la vie de Tycho, voir DREYER, *Tycho Brahe, a picture of scientific life and work in the sirtheenth century*. London, 1890. *Voir* aussi E. LEBON, *Histoire abregée de l'Astronomie*. Paris, 1899.

In solis et lunæ motus restitutos ad diarium A. 1598-1599 Prolegomena (inédit).
Ephemerides solis annorum 1586-92 (inédites).
Commentarii Geographici (inédits).

Tomus VI, VII, VIII.

Epistolæ (en grande partie inédites).

Tomus IX.

Diarium meteorologicum.
Compositiones medicamentorum.
Carmina.
Variæ scripturæ.

Tomus X, XI, XII.

Observationes (en partie inédites).

Tomus XIII.

Acta ad vitam Tychonis Brahe pertinentia.
Bibliographia.
Iconographia.

Le Tome I commence par un Ouvrage de jeunesse de Tycho sur la nouvelle étoile qu'il découvrit le 11 novembre 1572 dans la constellation de Cassiopée. L'apparition de cette étoile eut une grande influence sur la vie de Tycho, car ce fut elle qui tourna définitivement ses intérêts vers l'Astronomie. Il donne une description exacte de l'étoile, sa couleur, son état, sa position, etc. Il mesura sans cesse les distances entre les principales étoiles de Cassiopée et la nouvelle étoile et il démontra qu'elle n'avait pas de parallaxe sensible. Il en conclut que c'était une étoile fixe. La plupart de ses contemporains croyaient y voir une comète ou un météore, mais Tycho démontre que cette opinion n'est pas bien fondée.

Ce petit Livre est assez remarquable; on devine sans peine le futur grand savant. L'auteur parle souvent de ses intentions pour l'avenir, de tout ce qu'il reste à faire pour élever l'Astronomie à la hauteur d'une vraie science, programme qu'il devrait réaliser plus tard. En comparant ces pages avec le grand nombre d'autres Ouvrages que la nouvelle étoile provoqua, on voit clairement combien le jeune astronome devançait ses contemporains.

Kepler parle des recherches de Tycho sur la nouvelle étoile en ces termes : « Certe si nihil aliud stella illa, magnum equidem astronomum significavit et progenuit. » Une reproduction photographique de cet Ouvrage a été publiée en 1901 par l'Académie royale des Sciences de Copenhague pour célébrer le 300e anniversaire de la mort de son auteur.

Le Mémoire suivant, *De disciplinis mathematicis Oratio*, est le discours inaugural de Tycho à l'Université de Copenhague, prononcé le 23 septembre 1574. Il parle d'abord de la Géométrie et de son importance pour le développement de l'esprit humain ; ensuite de l'Astronomie dans l'antiquité et il fait l'éloge de Copernic. Il s'arrête longuement à l'Astrologie et professe des opinions auxquelles il n'eût guère voulu souscrire lui-même plus tard.

Ce beau discours témoigne que son auteur était non seulement savant, mais aussi poète. Il arrive souvent que Tycho, dans ses Ouvrages, exprime ses pensées en de beaux vers latins.

Les deux Mémoires qui sont à la fin du Tome I intéresseront tout particulièrement les géomètres. Le premier Mémoire ayant pour titre : *Triangulorum Planorum et Sphæricorum Praxis arithmetica qua maximus eorum præsertim in astronomicis Usus compendiose explicatur*, date de l'année 1591. Il a été publié pour la première fois par Studnicka à Prague (1886). C'est un Traité de Trigonométrie plane et sphérique destiné à faciliter, pour Tycho et ses collaborateurs, les calculs pratiques dans l'Observatoire. Tycho a pourtant eu l'intention de publier les méthodes dont il se servait : c'est ce qu'on peut voir dans ses lettres, mais cette publication n'a pas eu lieu. Le second Mémoire est publié ici pour la première fois.

Les théorèmes qu'expose Tycho n'ont pas la généralité et la simplicité que nous pouvons maintenant leur donner parce qu'à cette époque on ne calculait guère avec des nombres négatifs.

La réduction des observations qu'on exécuta à l'Observatoire de Tycho nécessita des calculs assez pénibles. On n'avait pas encore inventé les logarithmes. Pour exécuter des multiplications de nombres d'un grand nombre de chiffres, Tycho se servait d'un artifice qu'on a appelé la *méthode prosthaphærétique* (formé de πρόσθεσις, addition, et ἀφαίρεσις, soustraction) et qui en somme

se réduit à l'application de la formule

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

ou de cette autre formule

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

Si l'on veut former le produit des deux nombres positifs p et q, on cherche donc dans une Table de sinus deux angles α et β tels que $\sin \alpha = p$ et $\sin \beta = q$ et l'on forme la demi-différence entre

$$\sin(90 - \alpha + \beta) \quad \text{et} \quad \sin(90 - \alpha - \beta).$$

Si p ou q sont plus grands que le rayon r de la Table, on les divise par une puissance convenable de 10, ou on les décompose en une somme de plusieurs nombres $< r$.

La méthode prosthaphærétique a été connue avant Tycho par Ibn Jûnos et par Werner, mais cette méthode était tombée dans l'oubli et elle a été retrouvée par Tycho en collaboration avec son élève Paul Wittich. Kepler en parle comme d'un *artificium Tychonicum* ou *regula Wittichiana*.

Tycho fait un usage étendu de ce procédé dans ses calculs et il démontre tout particulièrement comment on peut s'en servir pour résoudre un triangle plan ou sphérique quand on connaît trois de ses éléments. D'Uranibourg la méthode prosthaphærétique s'est répandue et est devenue d'un usage commun dans les années suivantes. Elle a été développée avec beaucoup de détails par plusieurs astronomes pour être successivement remplacée par les logarithmes.

L'application de cet artifice est ce qu'il y a de plus remarquable dans les deux Mémoires susdits. Nous en présenterons ici un exemple.

Soient donnés dans un triangle sphérique deux côtés b et c et l'angle compris A ; pour trouver le côté a opposé à l'angle A, Tycho procède (p. 289, *Dogma*, VI) d'une manière que nous voudrions exprimer par la formule

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ &= \frac{1}{2}[\cos(b - c) + \cos(b + c)] + \frac{1}{2}[\cos(b - c) - \cos(b + c)] \cos A.\end{aligned}$$

Mais dans le dernier membre il reste encore une multiplication à exécuter. Dans le second des Mémoires susdits (p. 298) Tycho évite, à l'aide d'une Table de sinus, cette multiplication de la manière suivante. On calcule d'abord x de l'équation

$$\sin(90 - b + c) - \sin(90 - b - c) = 2 \sin x,$$

puis y et z des équations

$$\sin(90 - b + c) + \sin(90 - b - c) = 2y,$$
$$\sin(x + A) + \sin(x - A) = 2z$$

et enfin a de l'équation

$$y + z = \sin(90 - a).$$

Il paraît que l'idée d'introduire l'angle auxiliaire x est due à Bürgi.

L'œuvre principale de Tycho est intitulée *Astronomiæ instauratæ Progymnasmata*. Il y travaille pendant les quatorze dernières années de sa vie. Nous avons ici seulement à parler du Tome I de cet Ouvrage qui a été reproduit dans les Tomes II et III de ces Œuvres complètes.

Tycho avait fait construire à l'île d'Hveen, tout près de ses observatoires, sa propre imprimerie et sa propre papeterie. La plus grande partie de ce Tome y a été imprimée et des extraits ont été envoyés par Tycho à ses amis. Mais pendant l'impression il ajoutait les résultats de ses recherches les plus récentes, et pour cette raison il n'arrivait pas à publier ce Tome. L'impression fut terminée à Prague un an après la mort de Tycho.

Dans le Chapitre I il étudie le mouvement apparent du Soleil et détermine avec le plus grand soin les éléments de l'orbite de cet astre. A l'aide de ces constantes il dresse une Table du mouvement apparent du Soleil qui représente les observations à une petite fraction d'une minute près, pendant que les Tables de Copernic admettent des erreurs qui s'élèvent à 20 minutes.

Les observations du Soleil permettaient à Tycho de déterminer la latitude de son observatoire *Uranibourg*. Il trouva une valeur qui différa sensiblement de la valeur qu'il avait trouvée à l'aide de l'étoile polaire. Il expliqua cette différence par l'influence de la réfraction et il fut ainsi amené à étudier ce phénomène. Pendant

les années 1585-1589 il exécuta un grand nombre d'observations en vue de déterminer la valeur de la réfraction et il construisit une Table des réfractions astronomiques. Les observations du Soleil et des étoiles fixes donnaient des valeurs assez différentes parce qu'il avait adopté une valeur trop grande de la parallaxe solaire.

Dans le Chapitre I, Tycho s'occupe encore de la théorie de la Lune. A partir de l'année 1582 il observait régulièrement la Lune dans toutes les parties de son orbite et il s'assurait bientôt que la théorie de Ptolémée ne suffisait nullement pour représenter le mouvement de cet astre. Il réalisa des progrès importants dans la théorie de la Lune qui ne cessa pas de l'occuper jusqu'à sa mort. En parlant de ces recherches Laplace [1] s'exprime en ces termes :

« Les astronomes n'ajoutèrent rien à la théorie de la Lune de Ptolémée jusqu'à Tycho Brahe, qui, en comparant cette théorie avec ses observations de la Lune dans les octants, reconnut l'inégalité de la variation, dont le maximum correspond à ces points. L'exactitude de ces observations lui fit encore reconnaître que l'équation du temps propre au Soleil n'était point applicable sans correction à la Lune, et qu'il fallait, pour ce dernier astre, la corriger d'une quantité dépendante de l'anomalie du Soleil. Les astronomes ont ensuite appliqué cette correction au mouvement de la Lune, en donnant à cet astre la même équation du temps qu'à tous les autres, ce qui ajoute à son mouvement l'inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle*. On supposait, avant Tycho Brahe, l'inclinaison de l'orbite lunaire constante et le mouvement de ses nœuds uniforme. Ce grand astronome dut encore à la bonté de ses observations la connaissance des deux inégalités principales de ces éléments, d'où résulte la principale inégalité de la Lune en latitude. »

Dans ses recherches sur les planètes, sur la nouvelle étoile et sur les comètes, Tycho avait besoin de positions exactes d'un grand nombre d'étoiles de repère. On avait, il est vrai, le catalogue de Ptolémée, mais il laissait beaucoup à désirer et ne suffisait pas à

---

(1) *Œuvres complètes*, t. V, p. 390.

ses besoins. Dans le Chapitre II, l'auteur se propose de remédier à ce défaut ; il parle d'abord des différentes méthodes qu'il appliquait pour déterminer les positions des étoiles fixes et il dresse ensuite un catalogue de 777 étoiles contenant la longitude, la latitude et la grandeur pour l'année 1600, et un autre catalogue de 100 étoiles contenant l'ascension droite et la déclinaison pour les années 1600 et 1700. Dans les dernières années qu'il passait à Hveen, Tycho observa un certain nombre d'autres étoiles fixes et il construisit un catalogue de 1000 étoiles qu'il envoya en manuscrit à ses amis et protecteurs. On trouve ce catalogue dans le Tome III des Œuvres de Tycho. Il a été publié pour la première fois par Kepler dans ses *Tabulæ Rudolphinæ* (1627).

Dans le Chapitre III, l'auteur s'occupe de la nouvelle étoile dont nous avons parlé plus haut ; il donne une description détaillée de sa couleur et de ses variations d'éclat, et il discute les récits d'Hipparque et d'autres sur des phénomènes analogues.

Dans le Chapitre IV, l'auteur donne les résultats de ses mesures des distances entre la nouvelle étoile et neuf autres étoiles de Cassiopée et des distances entre les étoiles de repère. On y trouve en outre une description des instruments à l'aide desquels on avait exécuté ces mesures. Tycho construisait avec beaucoup de talent des instruments astronomiques qui lui permettaient d'atteindre une exactitude qui surpassait essentiellement celle de ses prédécesseurs. Il se rendait parfaitement compte que ce qui importe est d'atteindre la plus grande stabilité et symétrie dans la construction et que les erreurs inévitables, qui entachent tout instrument, sont à corriger par des calculs.

Dans le Chapitre V, Tycho donne les positions des neuf étoiles de repère susdites déduites d'une part de ses propres observations, d'autre part des Tables de Copernic et des Tables Alphonsines. Ces positions lui permettent de calculer, de plusieurs manières différentes, les positions de la nouvelle étoile. L'accord entre les différentes observations se montre très satisfaisant quand on se sert des positions de Tycho pour les étoiles de repère, mais non quand on applique les positions antérieures.

Dans le Chapitre suivant, l'auteur se demande quelle peut être la distance entre l'étoile et la Terre. Il démontre de quatre

manières différentes qu'elle est beaucoup plus éloignée que les planètes et il en conclut qu'elle est une étoile fixe.

Tycho estime que l'étoile était un peu plus grande que le Soleil au moment où elle apparut, mais qu'elle diminuait successivement en grandeur pour devenir de la même grandeur que la Terre au moment où elle disparut. Il saisit cette occasion pour exprimer ses opinions sur les grandeurs des diamètres du Soleil, de la Lune et des planètes.

Les Chapitres VIII-X contiennent une analyse détaillée de tout ce qui a été publié par d'autres astronomes sur la nouvelle étoile.

L'Ouvrage se termine par quelques considérations astrologiques.

On doit beaucoup de reconnaissance à M. Dreyer pour le grand soin qu'il a apporté à cette publication et pour les savantes Notes qu'il a ajoutées. Il a eu pour collaborateur M. Hans Rœder en ce qui concerne des questions d'ordre philologique.

N.-E. Nörlund.

MÉLANGES.

SUR LES SOMMES ABÉLIENNES DE VOLUMES CYCLIDO-CONIQUES;

Par M. A. Buhl.

(*Suite et fin.*)

2. *Cas de la cyclide de Dupin.* — On sait que cette surface est engendrée à l'aide d'une ellipse rapportée à ses axes Oxy et d'une hyperbole rapportée de même à Oxz, ces deux coniques étant focales l'une de l'autre. Deux sphères, toujours tangentes, dont les centres décrivent respectivement lesdites coniques, ont une même enveloppe qui est la célèbre cyclide. Considérons la sphère S, appartenant à la première famille, dont le centre est le

point $A(a, 0, 0)$ et dont le rayon est $c+k$. Considérons aussi la sphère S', de la seconde famille, dont le centre est aussi sur Ox, en $C(c, 0, 0)$ et dont le rayon est $a+k$.

Soit maintenant un cône, de sommet O, découpant, sur S, deux aires de différence $\sigma_2 - \sigma_1$ et, sur S', deux aires de différence $\sigma'_2 - \sigma'_1$.

De telles différences d'aires sphériques peuvent s'exprimer par

$$4R \int\int_\sigma \frac{ax+by+cz}{(x^2+y^2+z^2)^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\sigma$$

quand il s'agit d'une sphère de rayon R et de centre (a, b, c). La cloison d'intégration σ est une cloison quelconque tendue dans le cône intersecteur; c'est à elle que se rapportent les variables x, y et z.

Nous avons donc maintenant, en posant $r^2 = x^2+y^2+z^2$,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4(c+k)\int\int_\sigma \frac{ax}{r^4}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\sigma,$$

$$\sigma'_2 - \sigma'_1 = 4(a+k)\int\int_\sigma \frac{cx}{r^4}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\sigma.$$

Prenons maintenant l'équation de la cyclide de Dupin, telle qu'elle a été écrite par G. Darboux,

$$(X^2+Y^2+Z^2+a^2-c^2-k^2)^2 - 4a^2\left(X+\frac{ck}{a}\right)^2 - 4(a^2-c^2)Y^2 = 0.$$

On a ici

$$\varphi_m = r^4, \qquad \varphi_{m-1} = 0, \qquad \varphi_{m-3} = -8ackx$$

et, par suite,

$$\sum \tau_i = 8ack\int\int_\sigma \frac{x}{r^4}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\sigma$$

Comparant avec les différences d'aires sphériques ci-dessus, on a

$$\sum \tau_i = \frac{2ck}{c+k}(\sigma_2-\sigma_1) = \frac{2ak}{a+k}(\sigma'_2-\sigma'_1).$$

Cette double égalité exprime un théorème qu'on peut énoncer comme suit, en langage ordinaire :

Si l'on considère la cyclide de Dupin et les deux sphères enveloppées qui ont leur centre en ligne droite avec le centre

de la cyclide et respectivement situés aux sommets réels des coniques réciproquement focales, la somme abélienne des volumes coniques déterminés par la cyclide dans un cône quelconque, de sommet au centre de la cyclide, est proportionnelle à la différence des aires déterminées par ce cône sur l'une ou l'autre des sphères.

Peut-être faut-il convenir que la double égalité qui précède a, sur cet énoncé, non seulement l'avantage de la concision mais en outre celui de faire connaître les facteurs de proportionnalité. A ces facteurs près, on peut d'ailleurs énoncer le théorème avec toute sphère ayant son centre sur Ox, c'est-à-dire sur la droite des sommets réels des coniques focales, mais il est particulièrement intéressant de ne point faire intervenir d'autres sphères que celles qui engendrent la cyclide.

Si k est nul, la somme abélienne des quatre τ_i est nulle parce que O devient alors un centre *de symétrie* pour la surface.

3. *Généralités.* — J'énoncerai d'abord un théorème qui, comme celui terminant le paragraphe 1, sera d'une vérification immédiate :

Si S *est la somme abélienne de volumes coniques relative à la surface générale*

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \varphi_{m-2} + \varphi_{m-3} + \varphi_{m-4} + \ldots = 0 \tag{3}$$

et si S_1 *et* S_2 *sont les sommes analogues pour les surfaces*

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \varphi_{m-2} + \star_{m-3} + \psi_{m-4} + \ldots = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_m + \star_{m-1} + \theta_{m-2} + \varphi_{m-3} + \theta_{m-4} + \ldots = 0, \tag{5}$$

on a

$$S = S_1 + S_2. \tag{6}$$

On pourrait d'ailleurs encore généraliser un peu cet énoncé en multipliant les équations (4) et (5) par des facteurs différents et en leur ajoutant des termes, mais le plus intéressant semble être dans une voie contraire. Cherchons, pour réaliser S d'après (6), quelles sont les surfaces (4) et (5) *les plus simples* qui puissent déterminer les sommes S_1 et S_2. On peut évidemment prendre les

surfaces d'équation

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \varphi_{m-2} = 0, \tag{7}$$

$$\varphi_m + \varphi_{m-3} = 0. \tag{8}$$

La première a un point singulier à l'origine avec cône tangent d'ordre $m - 2$; la seconde y a de même un point singulier d'ordre $m - 3$ qui est d'ailleurs un centre.

4. *Application aux cyclides quelconques.* — Imaginons maintenant que l'équation (3) soit celle d'une cyclide quelconque. Alors (7) est celle d'une cyclide ayant un point double à l'origine, donc en dehors de la ligne double; c'est l'inverse ou la podaire d'une quadrique (G. Darboux, *loc. cit.*, p. 408). Quant à l'équation (8), étant donné que $\varphi_m = r^4$ et que φ_{m-3} est du premier degré, c'est une surface de révolution dont l'axe passe par l'origine perpendiculairement au plan $\varphi_{m-3} = 0$.

La somme abélienne des quatre volumes délimités dans un cône quelconque, par une cyclide quelconque, est la somme de deux sommes abéliennes de même cône et de même nature relatives à deux cyclides dégénérées dont l'une est l'inverse d'une quadrique (ou la podaire d'une autre quadrique) et dont l'autre est une surface de révolution.

On aurait pu baser ce théorème sur un calcul un peu plus détaillé; je préfère indiquer celui-ci dans un cas un peu plus général.

5. *Emploi de l'inversion quadrique de Hirst.* — Considérons un polynome homogène, du second degré, tel que

$$f(x, y, z, t) = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2B_1 yz + 2B_2 zx + 2B_3 xy + Ct^2.$$

Soit la surface du quatrième degré

$$(xf_x + yf_y + zf_z)^2 + 2\varphi_1(xf_x + yf_y + zf_z) + \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_0 = 0,$$

dont nous nous servirons pour délimiter quatre volumes dans un cône quelconque ayant toujours O pour sommet. La somme abélienne S de ces quatre volumes se compose, d'après (6), de deux parties S_1 et S_2 qui sont des sommes abéliennes, de même cône,

définies par les surfaces (7) et (8) qui sont ici

$$(9)\qquad (xf_x+yf_y+zf_z)^2+2\varphi_1(xf_x+yf_y+zf_z)+\varphi_2=0,$$

$$(10)\qquad (xf_x+yf_y+zf_z)^2+\varphi_1=0.$$

Étudions d'abord la surface (9). Elle a un point double à l'origine et la transformation

$$(11)\qquad \frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=-\frac{Tf_t}{xf_x+yf_y+zf_z}\qquad (T=t=1),$$

la change en une quadrique.

Quant à la surface (10), toutes les sections parallèles au plan φ_1 la coupent suivant des coniques homothétiques.

On voit qu'on obtient, en tous points, une généralisation du théorème du paragraphe précédent.

La transformation (11) n'a rien d'essentiellement nouveau; c'est la combinaison d'une homographie et d'une inversion, mais elle n'en est pas moins fort remarquable de par la définition globale qu'on en peut donner. Elle transforme M en N sur OM, ce point N étant conjugué harmonique de M par rapport aux points où OM coupe une quadrique qui serait ici $f=0$; cette intéressante transformation *birationnelle* est d'ailleurs connue sous le non d'*inversion quadrique de Hirst* et conservée, sous la forme précédente, par Gaston Darboux (*loc. cit.*, p. 366).

Il ne peut donc sembler superflu de la faire intervenir dans une extension homographique d'un cas traité d'abord, cas qui se retrouve si

$$f=x^2+y^2+z^2-R^2t^2.$$

Il y aurait sans doute d'autres exemples intéressants quant à la transformation homographique des sommes abéliennes de volumes coniques.

6. Dans une Note *Sur l'intervention de la géométrie des masses dans certains théorèmes concernant les surfaces algébriques* (*Comptes rendus*, 18 mars 1918), j'indique brièvement la possibilité de généralisations concernant ce qui précède.

Si, sur une cloison, on étend une double couche analogue à une couche magnétique et de densité *constante*, le moment

d'inertie de cette double couche, par rapport à un point tel que O, est le volume conique compris entre O et la cloison. Si la densité constante devient variable, quand on se déplace sur la couche, on obtient alors des *volumes généralisés* pour lesquels existent des théorèmes abéliens analogues à ceux concernant les véritables volumes.

Alors que les volumes coniques ordinaires, étudiés ci-dessus, dépendent des quatre premiers termes de (1), il existe des sommes abéliennes de ces volumes généralisés qui dépendent des k premiers ou derniers termes de (1).

Notons encore que la première intégrale double du paragraphe 2, qui représente les différences d'aires sphéro-coniques de M. G. Humbert, peut représenter aussi des sommes abéliennes de tels volumes et que, interprétée ainsi, elle permet d'obtenir, dans les cyclides, des résultats identiques à ceux obtenus dans la sphère.

SUR LES VALEURS LIMITES DE L'INTÉGRALE DE POISSON RELATIVE A LA SPHÈRE EN UN POINT DE DISCONTINUITÉ DES DONNÉES;

Par M. GASTON JULIA.

1. L'étude de l'intégrale de Poisson relative à la circonférence a fait l'objet de nombreux travaux. Si l'on définit sur une circonférence C de rayon R, une fonction V (M) du point M qui décrit la circonférence, et si P est un point intérieur à la circonférence, l'intégrale de Poisson a pour valeur au point P

$$V(P) = \frac{R^2 - l^2}{2\pi R} \int_C \frac{V(M)}{r^2}\, ds,$$

l étant la distance du point P au centre de la circonférence, et r la distance PM. La fonction V (M) est, naturellement, supposée intégrable, soit au sens de Riemann, soit au sens de M. Lebesgue. V (P) est alors une fonction harmonique dans C, on cherche si

valeur limite lorsque P tend vers un point déterminé M du contour. Les résultats sont classiques. La limite ne dépend que des valeurs de la donnée V sur un arc de C *arbitrairement petit* comprenant à son intérieur le point M. Si la donnée V est continue au point M, V(P) tend vers V(M), sur tout chemin intérieur à C aboutissant en M. Si M est un point de discontinuité de première espèce pour la fonction V(M), c'est-à-dire un point tel que V(M') ait deux limites distinctes bornées $V(M+\varepsilon)$ et $V(M-\varepsilon)$ lorsque M' tend vers M soit d'un côté, soit de l'autre du point M, la limite de V(P) dépend de la tangente MT en M à la courbe suivie par le point P qui tend vers M, et elle varie linéairement avec l'angle que cette droite MT fait avec la tangente en M au cercle C. Si α est l'angle de MT avec la demi-tangente menée au cercle en M dans la direction correspondant à $V(M+\varepsilon)$, la limite sera

$$\frac{\alpha}{\pi} V(M-\varepsilon) + \frac{\pi-\alpha}{\pi} V(M+\varepsilon).$$

On trouvera cette formule dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard (Tome I, pages 272-275 de la deuxième édition).

Si les deux valeurs $V(M+\varepsilon)$ et $V(M-\varepsilon)$ sont égales à $+\infty$, on peut supposer sans rien changer à V(P) que $V(M)=+\infty$ et la valeur limite de V(P) quel que soit le chemin suivi pour arriver en M sera $+\infty$. Tout se passe comme si V(M) était continue en M avec la valeur $+\infty$.

Au contraire, si $V(M+\varepsilon)=+\infty$, tandis que $V(M-\varepsilon)=-\infty$, la fonction V(P) est complètement indéterminée aux environs de M et peut tendre vers n'importe quelle valeur lorsque P tend vers M par un chemin convenable : c'est l'extension du point de discontinuité de première espèce; les valeurs limites de V(P) sont, ici encore, toutes les valeurs comprises entre $V(M-\varepsilon)=-\infty$ et $V(M+\varepsilon)=+\infty$, c'est-à-dire toutes les valeurs possibles.

2. Si l'on étudie le même problème pour l'intégrale de Poisson relative à une sphère S de rayon R

$$V(P) = \frac{R^2-l^2}{4\pi R}\int\int_S \frac{V(M)}{r^3}\,d\sigma,$$

où P est le point intérieur à la sphère située à la distance l du

centre, M le point qui décrit la sphère ($r = \overline{PM}$), on cherchera si V(P) tend vers une limite lorsque P tend vers un point O de la sphère suivant une courbe tangente en O à une direction OT, et l'on cherchera à préciser le lien qui existe entre la valeur de la limite et les deux angles qui fixent la direction OT autour du point O. Lorsque la donnée V(M) est continue au point O que l'on étudie, il est classique depuis Schwarz que V(P) tend vers V(O) quelle que soit la direction OT. On se propose ici, en admettant que V(M) *n'est pas continue en* O, d'étudier la question et de l'élucider dans une certaine mesure.

3. Ainsi qu'on le reconnaîtra de suite, la limite de V(P) lorsque P tend vers O dans la direction TO [1] ne dépend que des valeurs de la donnée V(M) aux points M intérieurs à un petit cercle de la sphère S de pôle O, *de rayon arbitrairement petit d'ailleurs*. Il est, d'autre part, indispensable de préciser le mode suivant lequel la donnée V(M) sera discontinue en O, si l'on veut obtenir des résultats précis quant aux limites de V(P). A cet égard, on peut adopter différentes hypothèses correspondant à différents modes de discontinuité de la fonction V(M) qui dépend des deux coordonnées curvilignes de M. Voici celle que nous adopterons : elle est d'un mode très général dans lequel rentrent les cas usuels de discontinuité pour les fonctions de deux variables, et elle ne suppose pas que O soit un point de discontinuité isolé.

Nous supposerons V(M) fonction uniforme, bornée [2] et intégrable (ou sommable) des deux coordonnées curvilignes de M sur la sphère S. Lorsque M tendra vers O en suivant une courbe de la sphère tangente en O à une direction OU du plan tangent, V(M) sera supposée tendre vers une limite ne dépendant que de la direction OU. Pour préciser, si Ox et Oy sont deux axes rectangulaires du plan tangent en O, Oz étant la normale dirigée vers le

---

[1] J'emploierai souvent cette expression pour dire que P *tend vers* O *sur une courbe tangente en* O *à la droite* OT.

[2] On peut, sans complication essentielle, supposer V(M) non bornée, mais toujours sommable; ce qui va être établi dans l'hypothèse où V(M) est bornée s'étendra immédiatement au cas où V(M) n'est pas bornée. Pour la clarté de l'exposition, on n'a envisagé ici que la première hypothèse.

centre de S. La direction OU sera fixée par l'angle $\psi = \widehat{Ox, OU}$, et la limite de V(M) pour toute courbe de la sphère tangente en O à OU sera $f(\psi)$, la fonction $f(\psi)$ étant supposée fonction bornée, intégrable (ou sommable) de la variable ψ [évidemment $f(\psi)$ est périodique par rapport à ψ, avec la période 2π]. Il pourra cependant y avoir un nombre fini ou même un ensemble infini, de mesure nulle, de directions exceptionnelles OU pour lesquelles la fonction $f(\psi)$ n'ait pas de valeur déterminée, c'est-à-dire pour lesquelles V(M) ne tende pas vers une même limite quelle que soit la courbe tangente à OU que suive sur la sphère le point M qui tend vers O.

4. Un exemple courant d'une discontinuité telle que la précédente se présente pour les fractions rationnelles. Si V(M), que l'on peut considérer *autour de* O, sur la sphère, comme une fonction uniforme des coordonnées x et y, peut se mettre dans un cercle assez petit de pôle O sous la forme $V(M) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant deux polynomes homogènes du même degré, nuls en O, tels cependant que le polynome $Q(x, y)$ ait un maximum ou un minimum en O, de façon que la courbe $Q(x, y) = 0$ ait le point O pour point multiple isolé [ce qui revient à dire que l'équation en t : $Q(1, t) = 0$ ait toutes ses racines imaginaires], O sera un point de discontinuité pour V(M) du type signalé; en posant $\tan\psi = t$ la fonction $f(\psi)$ n'est autre que la fonction $\frac{P(1, t)}{Q(1, t)}$ qui, évidemment, est bornée et intégrable.

Comme deuxième exemple, considérons sur la sphère S le grand cercle du plan zOx et supposons que sur l'hémisphère $y > 0$ on donne $V(M) = V_1(M)$, sur l'hémisphère $y < 0$, $V(M) = V_2(M)$, chacune des fonctions V_1 et V_2 n'étant définie que dans un hémisphère, ces fonctions n'ayant donc aucun rapport entre elles. On supposera V_1 et V_2 bornées, intégrables (ou sommables), et de plus, lorsque M tend vers un point M_0 du grand cercle qui sépare les deux hémisphères on supposera que d'un côté de ce cercle V_1 tende toujours vers la même limite $V_1(M_0)$ quel que soit le chemin suivi par M dans le premier hémisphère, et, de l'autre côté de ce cercle, que V_2 tende toujours vers la même limite

$V_2(M_0)$ quel que soit le chemin suivi par M dans le deuxième hémisphère. $V_1(M_0)$ et $V_2(M_0)$ sont deux fonctions du point M_0 du grand cercle sans rapport entre elles. [On est dans l'hypothèse précédente quand on prend par exemple $V_1(M) = +1$ pour $y > 0$ et $V_2(M) = -1$ pour $y < 0$.] Tout point M_0 du grand cercle séparateur est un point de discontinuité de $V(M)$ satisfaisant aux hypothèses énoncées plus haut.

Pour chacun de ces points, il y a deux directions exceptionnelles qui sont les deux directions opposées tangentes au cercle séparateur. [Les valeurs de $V(M)$ *sur le cercle lui-même* ne jouent aucun rôle dans la question.]

5. Dans les hypothèses précédentes, considérons l'intégrale de Poisson

$$V(P) = \frac{R^2 - l^2}{4\pi R} \int\int_S \frac{V(M)}{r^3} d\sigma,$$

où $r = \overline{PM}$ et où l est la distance du point intérieur P au centre de la sphère. Par une transformation classique, si M′ désigne le second point d'intersection de MP avec la sphère S, il vient

$$rr' = R^2 - l^2, \qquad r' = \overline{PM'}$$

et

$$\frac{d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r'^2},$$

ce qui donne pour $V(P)$ la nouvelle valeur

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R} \int\int_S \frac{V(M)\, d\sigma}{r'};$$

$V(P)$ se présente sous la forme du potentiel en P d'une simple couche étalée sur S, la densité au point M′ qui décrit la sphère étant $\frac{V(M)}{4\pi R}$, M et M′ se correspondant comme il a été dit.

Envisageons un point déterminé M′ de la sphère, et faisons tendre P vers O, la densité $\frac{V(M)}{4\pi R}$ au point M′ variera avec P. Pour voir si elle a une limite, menons le plan déterminé par M′ et la tangente OT [1] à la courbe suivie par P pour aboutir en O, il

[1] Si M′ est sur cette tangente on voit bien par la suite que le plan à consi-

découpera dans la sphère un cercle γ que la droite OT partagera en deux arcs, sauf le cas écarté pour l'instant où elle est tangente à la sphère; sur l'un de ces arcs se trouve le point M', et l'autre arc, qui ne contient pas M', admet en O une certaine demi-tangente OU, correspondant à un angle ψ. On voit alors sans difficulté que la valeur limite de la densité en M' sera $\frac{f(\psi)}{4\pi R}$ (puisque M tend vers O dans la direction OU), à condition bien entendu que cette direction OU ne soit pas pour la fonction $f(\psi)$ une des directions exceptionnelles dont nous avons parlé plus haut. Si la direction OT est tangente à la sphère, et correspond à un angle $\widehat{Ox, OT} = \psi$, la limite de la densité en M' sera $\frac{f(\psi)}{4\pi R}$ quel que soit M' sur la sphère, toujours en supposant que OT n'est pas une direction exceptionnelle. En tout point M' de la sphère, sauf peut-être pour les points d'un ensemble de mesure superficielle nulle E formé des cercles dont les plans passant par OT contiennent les directions exceptionnelles, la densité a une limite. Il est alors facile de voir quelle va être la limite de V(P) lorsque P tendra vers O.

6. Divisons la sphère S en deux calottes S_1 et S_2, S_1 étant une calotte de rayon très petit entourant le point O. M' étant un point quelconque de S_2. M sera dans S_1 dès que P sera dans le segment sphérique recouvert par la calotte S_1. Envisageons dans V(P) la partie d'intégrale correspondant à S_2

$$\frac{1}{4\pi R}\int\int_{S_2}\frac{V(M)\,d\sigma'}{r'}.$$

Lorsque P tend vers O, l'élément $\frac{V(M)}{r'}$ de cette intégrale tend en tout point M' de S vers la valeur $\frac{f(\psi)}{\overline{OM'}}$, où ψ est l'angle qui correspond au plan M'OT par le procédé qu'on vient d'indiquer au numéro précédent. [Il y a exception pour les points M' situés sur cet ensemble de mesure nulle E indiqué précédemment.] La

---

dérer est le plan osculateur en O à la courbe suivie par P, mais ceci n'a pas d'importance pour le problème car OT ne perce la sphère qu'en *un point*, hors O.

valeur limite $\frac{f(\psi)}{\overline{OM'}}$, ainsi d'ailleurs que la valeur de l'élément $\frac{V(M)}{\overline{PM'}}$ lorsque P est assez voisin de O, sont bornées dans leur ensemble; il en résulte, d'après un théorème de M. Lebesgue sur le passage à la limite dans une intégrale, que l'intégrale précédente tend, quand P tend vers O, vers la limite

$$\frac{1}{4\pi R}\int\int_{S_2}\frac{f(\psi)}{\overline{OM'}}\,d\sigma',$$

avec la même correspondance que plus haut entre ψ et M'.

La portion

$$\frac{1}{4\pi R}\int\int_{S_1}\frac{V(M)}{\overline{PM'}}\,d\sigma'$$

de l'intégrale de Poisson en P, relative à la calotte S_1, est infiniment petite avec cette calotte puisque c'est le potentiel d'une simple couche de *densité bornée* $\frac{V(M)}{4\pi R}$ étalée sur une *aire infiniment petite*. On peut donc rendre l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi R}\int\int_{S_1}\frac{V(M)}{\overline{PM'}}\,d\sigma'$$

arbitrairement petite, *quel que soit* P intérieur à la sphère ou sur la sphère, en prenant simplement la calotte S_1 *assez petite*.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HUMBERT (Pierre). — Sur les surfaces de Poincaré. Thèse de Mécanique rationnelle présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, soutenue le 18 juin 1918. 1 vol. in-4°, VI 83 pages. Paris. Gauthier-Villars et Cie, 1918.

M. Pierre Humbert commence son travail par une Introduction, dans laquelle il fait un exposé historique très complet des recherches de Poincaré, de Darwin et de Liapounoff sur les figures d'équilibre relatif d'une masse liquide homogène, soumise à l'attraction newtonienne de ses particules et tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. Ces auteurs se sont servis, pour désigner les fonctions de Lamé, de notations variées, entre lesquelles il est malaisé de se reconnaître : M. P. Humbert donne un Tableau, très utile, indiquant la concordance des symboles divers employés avant lui pour représenter les mêmes quantités.

Dans le Chapitre I, l'auteur s'occupe de la détermination *des Jacobiens critiques*, c'est-à-dire des ellipsoïdes d'équilibre à trois axes inégaux dans le voisinage desquels, pour une variation infiniment petite de la vitesse angulaire, il existe des figures d'équilibre non ellipsoïdales, infiniment peu différentes de l'ellipsoïde de Jacobi. Il simplifie, d'une façon élégante, la méthode de Liapounoff, d'ailleurs peu connue en France. Il s'occupe ensuite de la résolution des deux équations à deux inconnues qui se présentent dans cette détermination. Ces équations contiennent un entier n : quand cet entier est très grand, les fonctions qui y figurent sont voisines des fonctions de Legendre ; s'appuyant sur ce fait, M. Pierre Humbert donne une méthode d'approximation, dont les résultats sont déjà satisfaisants pour la valeur $n = 3$, la première qui se présente. A cette occasion, M. Pierre Humbert indique, pour la fonction de Legendre de deuxième espèce, déjà tant étudiée, une expression nouvelle, élégante et commode pour le calcul effectif. Depuis le dépôt de sa thèse, il a d'ailleurs étendu sa méthode à un cas général concernant la deuxième solu-

tion d'une équation différentielle, linéaire et homogène du second ordre, dont une première solution est un polynome et dont les coefficients sont des polynomes [1]; plus récemment [2], il a complété ses recherches relatives à la fonction de Legendre de deuxième espèce, en les étendant à la fonction analogue, plus générale, rattachée aux polynomes déduits du développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-2}$ étudiés par Gegenbauer.

Après avoir ainsi formé et résolu les équations approchées, M. Pierre Humbert, revenant aux équations exactes, donne trois formules de réduction relatives aux fonctions de Lamé de deuxième espèce; sa méthode lui permet de mettre l'équation donnant le Jacobien critique sous une forme nouvelle très simple. Il montre ensuite l'identité de cette forme, avec la forme plus compliquée donnée par M. Liapounoff.

Le Jacobien critique une fois déterminé, il reste à étudier les surfaces d'équilibre infiniment voisines : ce sont ces surfaces que l'auteur appelle *surfaces de Poincaré*.

Dans le Chapitre II, il s'occupe de la première surface de Poincaré, surface d'ordre 3, ou surface *piriforme*. Comparant les schémas de Poincaré et de M. Darwin, il démontre que la section de la surface par un des plans de coordonnées ne peut jamais présenter d'inflexions, dans le cas de la Mécanique. Il y a là une analogie curieuse avec l'herpolhodie dont Poinsot avait donné un dessin schématique avec des inflexions, tandis qu'il a été démontré plus tard que, dans le cas de la Mécanique, cette courbe n'a pas d'inflexions. Par diverses remarques géométriques sur les tangentes, la courbure, etc., M. Pierre Humbert donne le moyen de construire les sections principales de la surface piriforme avec une grande exactitude.

Dans le Chapitre III sont étudiées de même les surfaces de Poincaré d'ordre 4, appelées quelquefois surfaces en forme de *haltère* quand elles sont positives. M. P. Humbert calcule exac-

---

(1) *A reduction-formula for the Functions of the second kind connected with the Polynomials of applied mathematics, by Pierre Humbert* (*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, session 1917-1918, vol. XXXVIII, Part I, n° 9, p. 61).

(2) P. Humbert, *Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre* (*Comptes rendus*, séance du 1er juillet 1918).

tement les éléments de ces surfaces; il donne le dessin de leurs sections principales et il montre que ces sections présentent des points d'inflexion, même pour de petites valeurs du paramètre ε.

Dans le Chapitre IV, l'auteur applique les méthodes, qu'il a indiquées dans le Chapitre I, au calcul des Jacobiens critiques et des surfaces de Poincaré d'ordres 5 et 6. Les dessins donnant les formes des sections sont calculés exactement; la surface d'ordre 6 est, pour la première fois, discutée. Il faut savoir grand gré à M. P. Humbert d'avoir effectué les calculs numériques nécessaires et d'avoir ainsi donné la détermination complète des surfaces d'ordres 5 et 6.

Enfin, dans le Chapitre V, l'auteur étudie les surfaces de Poincaré, au point de vue géométrique, en élargissant leur définition statique : il donne une représentation paramétrique des premières d'entre elles, et en déduit plusieurs résultats élégants.

P. Appell.

STADLER (Sigurd). — Sur les systèmes d'équations aux différences finies linéaires et homogènes. Thèse pour le doctorat. in-4°, 61 pages. Lund, 1918.

L'auteur a étudié un système d'équations de la forme

$$(1) \qquad (x-1)\Delta u_j(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(x)\, u_i(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients $p(x)$ sont des fonctions développables en séries de facultés, et où l'on a posé

$$\Delta u(x) = u(x) - u(x-1).$$

On démontre l'existence d'un système fondamental de solutions de la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \left[\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \log \frac{1}{x} + \ldots + \varphi_r(x) \left(\log \frac{1}{x}\right)^{r} \right],$$

où les $\varphi(x)$ admettent des développements en séries de facultés. L'auteur a déterminé les domaines de convergence de ces séries

et il en a tiré profit pour calculer les valeurs asymptotiques des solutions quand on s'approche de l'infini en restant à l'intérieur d'un certain demi-plan.

Si les $p_{ij}(x)$ sont des fonctions méromorphes il en est de même des solutions $u_i(x)$, et l'on sait aisément indiquer les pôles des solutions avec leurs degrés de multiplicités.

L'auteur démontre en outre que (1) est le système le plus général qui admet un système fondamental de solutions de la forme (2).

MM. Birkhoff, Carmichael et Horn ont publié des travaux remarquables sur le même sujet, mais les résultats de M. Stadler sont, dans une certaine direction, plus généraux que ceux de ces auteurs.

N.-E. Nörlund.

MELANGES.

SUR LES VALEURS LIMITES DE L'INTÉGRALE DE POISSON RELATIVE A LA SPHÈRE EN UN POINT DE DISCONTINUITÉ DES DONNÉES;

Par M. Gaston JULIA.

[*Suite et fin* (1).]

7. La conclusion de tout ceci est que la limite de

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\cdot} \int_{S} \frac{V(M)}{\overline{PM}^2} d\sigma'$$

lorsque P tend vers O est précisément l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{\cdot} \int_{S} \frac{f(\xi)}{\overline{OM}^2} d\sigma',$$

(1) *Voir* le numéro d'août 1918, p. 214.

où l'on sait établir la correspondance entre le point M′ de S et l'angle ψ.

On voit en particulier que, si OT est tangente à la sphère sans être une direction exceptionnelle, l'angle ψ qui correspond à tout point M′ de la sphère est le même, et c'est $\psi = \widehat{Ox, OT}$; la valeur limite est donc

$$\frac{f(\psi)}{4\pi R}\int\int_S \frac{d\sigma'}{OM'} = f(\psi);$$

c'est précisément la valeur vers laquelle tend la donnée V(M) lorsque M, sur la sphère, tend vers O suivant une courbe tangente à OT.

Si OT est quelconque, il apparaît que la valeur limite de l'intégrale de Poisson, lorsque P tend vers O dans la direction TO, est égale au potentiel en O d'une masse distribuée sur S de telle façon que sur tout cercle γ de S dont le plan passe par OT, la densité sur chacun des arcs en lesquels OT découpe γ *soit constante et égale à* $\frac{f(\psi)}{4\pi R}$, l'angle ψ étant celui que fait avec Ox la demi-tangente en O à celui des deux arcs de γ sur lequel n'est pas le point M′ où l'on fixe la densité nouvelle. Il est clair que l'ensemble de mesure superficielle nulle E formé des cercles γ tangents aux directions exceptionnelles du plan tangent en O (et pour lesquels la densité nouvelle n'est pas définie) n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale précédente, d'après la propriété bien connue des ensembles de mesure nulle relative à l'intégration.

La distribution précédente de la densité nouvelle, constante sur chaque arc de petit cercle joignant sur S les deux points où OT perce S, dépend évidemment de la direction OT. Le potentiel en O de cette distribution, qui représente la valeur limite de l'intégrale de Poisson dans la direction TO, dépend donc de cette direction OT, et la loi de la dépendance est liée à celle de la répartition des nouvelles densités. Il importe de l'en affranchir si l'on peut, en donnant une représentation de la valeur limite de l'intégrale de Poisson qui soit une intégrale double étendue à un champ *indépendant de la direction* OT. La suite précisera ce que je veux dire par là.

8. Du point O projetons stéréographiquement la sphère sur le plan équatorial normal à Oz. OT perce ce plan en ω, OM′ le perce en M_1; nous poserons $OM_1 = r_1$ et nous désignerons par $d\sigma_1$ l'élément d'aire du plan équatorial. Il y a entre $r' = \overline{OM'}$ et $r_1 = \overline{OM_1}$ la relation $r_1 r' = 2R^2$, et entre les éléments $d\sigma'$ de S et $d\sigma_1$ du plan, la relation

$$\frac{d\sigma'}{r'^2} = \frac{d\sigma_1}{r_1^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\sigma'}{r'} = 2R^2 \frac{d\sigma_1}{r_1^3},$$

ce qui transforme l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi R} \int\int_S \frac{f(\psi)}{\overline{OM'}} d\sigma'$$

dans l'intégrale

$$\frac{R}{2\pi} \int\int \frac{f(\psi)\, d\sigma_1}{r_1^3},$$

étendue à tout le plan équatorial. La valeur de ψ qui correspond à M_1 s'obtient aisément comme il suit : par ω menons ωx_1 parallèle à l'axe Ox, et soit $\psi_1 = \widehat{\omega x_1, \omega M_1}$, on aura visiblement $\psi = \psi_1 + \pi$, à cause de la façon dont on a lié ψ à M′.

Mais la représentation précédente a encore un défaut : l'intégrale précédente est un potentiel (non pas potentiel newtonien, mais potentiel correspondant à la loi de potentiel $\frac{1}{r^3}$) au point O d'une masse distribuée sur le plan équatorial de façon que la densité sur chaque demi-droite ωM_1 émanée de ω *soit constante et égale à* $f(\psi_1 + \pi)\frac{R}{2\pi}$.

Lorsque OT varie, ω varie et toute la distribution des masses a son origine ω variable.

9. Il est facile de s'affranchir de ce petit inconvénient. Si ω_1 est en effet le point où la droite TO perce le plan $z = -R$, en menant $\overline{Om_1}$ équipollent à $\overline{\omega M_1}$, on verra que $\overline{\omega_1 m_1}$ est équipollent à $\overline{OM_1}$, par suite $\psi_1 = \widehat{Ox, Om_1}$ et $r_1 = \overline{\omega_1 m_1}$, ce qui transforme l'intégrale précédente en l'intégrale suivante étendue

à la totalité du plan tangent en O

$$\frac{R}{2\pi}\int\int\frac{f(\psi_1+\pi)\,d\sigma_1}{r_1^3},$$

où, cette fois, la distribution de la densité [constante et égale à $\frac{R}{2\pi}f(\psi_1+\pi)$ sur toute demi-droite Om_1 faisant avec Ox l'angle ψ_1] *ne dépend en rien de la direction* OT. C'est seulement *par le point* ω_1, et, pour préciser, dans la quantité $r_1=\overline{\omega_1 m_1}$, qu'interviennent les deux angles habituels θ_0 et ψ_0 qui fixent la direction OT ($\theta_0=\widehat{Oz,OT}$, et ψ_0 est l'angle du demi-plan zOx avec le demi-plan zOT). On voit, en évaluant r_1 en fonction des coordonnées polaires ρ_1 et ψ_1 du point m_1, que l'intégrale précédente s'écrit

$$\frac{R}{2\pi}\int_{\psi_1=0}^{\psi_1=2\pi}f(\psi_1+\pi)\,d\psi_1$$
$$\int_{\rho_1=0}^{\rho_1=+\infty}\frac{\rho_1\,d\rho_1}{[R^2(1+\tan g^2\theta_0)+2R\rho_1\tan g\,\theta_0\cos(\psi_1-\psi_0)+\rho_1^2]^{\frac{3}{2}}}$$

et l'on voit que, dans le cas général, si l'on ne précise pas la fonction $f(\psi)$, cette intégrale dépend de θ_0 et ψ_0 d'une façon assez compliquée. Il en est donc de même, en général, de la limite de l'intégrale de Poisson (suivant la direction TO), que cette intégrale représente néanmoins de façon *explicite*.

10. Voici deux remarques de nature très simple où se manifeste l'utilité des considérations précédentes.

a. Si la donnée V(M) est *continue en* O, il est clair que la fonction $f(\psi)$ est, *quel que soit* ψ, égale à la valeur constante V(O). L'intégrale

$$\frac{R}{2\pi}\int\int\frac{f(\psi_1+\pi)}{r_1^3}\,d\sigma_1,$$

étendue au plan tangent xOy, sera égale à

$$\frac{R}{2\pi}V(O)\int\int\frac{d\sigma_1}{r_1^3}.$$

Elle ne dépend pas de la direction OT. Pour préciser, on a, en prenant pour évaluer $\int\int \frac{d\sigma_1}{r_1^4}$ la variable ψ_1 de m_1 et l'angle φ de $\overline{\omega_1 m_1}$ avec la direction de l'axe Oz,

$$\int\int \frac{d\sigma_1}{r_1^4} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\psi_1=0}^{2\pi} \frac{\cos^3\varphi}{R^3} R \operatorname{tang}\varphi \, d(R \operatorname{tang}\varphi)\, d\psi_1,$$

car les coordonnées polaires de m_1 sont $\rho_1 = R \operatorname{tang}\varphi$ et ψ_1, tandis que $r_1 = \frac{R}{\cos\varphi}$ et elle se réduit à

$$\frac{2\pi}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{R}.$$

Donc, l'intégrale de Poisson tend vers la valeur $V(O)$ lorsque M tend vers O suivant une courbe quelconque intérieure à la sphère. C'est le résultat classique.

b. Supposons les données telles qu'il y ait une ligne de discontinuités, passant par O, ayant en O une tangente qu'on peut supposer confondue avec Ox. D'un côté de C, $V(M)$ tendra vers une valeur $V_1(O)$ quand M tendra vers O, et, de l'autre côté, $V(M)$ tendra vers une valeur $V_2(O)$. Ces deux valeurs sont deux fonctions finies du point O de C, qui peuvent n'avoir aucun rapport entre elles. On aura alors $f(\psi) = V_1(O)$ pour $0 < \psi < \pi$, et $f(\psi) = V_2(O)$ pour $\pi < \psi < 2\pi$. Les directions $\psi = 0$ et $\psi = \pi$ sont exceptionnelles. Alors la distribution de la densité dans le plan xOy est constante et égale à $\frac{R}{2\pi} V_1(O)$ dans le demi-plan $y > 0$, constante et égale à $\frac{R}{2\pi} V_2(O)$ dans le demi-plan $y < 0$. On voit de suite que lorsque ω_1 se déplace dans le plan $z = -R$ sur une parallèle à Ox, l'intégrale

$$\frac{R}{2\pi} \int\int \frac{f(\psi_1 + \pi)\, d\sigma_1}{r_1^4}$$

ne change pas. *Elle ne dépend donc que de l'angle α que fait le demi-plan xOy avec le demi-plan xOT.*

Au lieu de calculer ici l'intégrale $\int\int \frac{f(\psi_1 + \pi)\, d\sigma_1}{r_1^4}$ étendue au

plan $z = 0$, il est aussi simple de revenir à la première représentation fournie pour la limite de l'intégrale de Poisson : c'est le potentiel newtonien en O d'une densité répartie sur la sphère S, égale à la constante $\frac{V_1(O)}{4\pi R}$ sur celle des deux calottes découpées dans S par le plan xOT qui, aux environs de O, est du côté des $y < 0$ et égale à $\frac{V_2(O)}{4\pi R}$ sur l'autre calotte. Si l'on désigne par α l'angle du demi-plan xOy avec le demi-plan xOT tout revient à calculer $\int\int \frac{d\sigma}{\overline{OM}}$ étendue à la calotte qui est du côté des $y > 0$ autour de O. Pour calculer $d\sigma$ nous nous servirons : 1° des cercles de la calotte tangents en O à Ox ; 2° des cercles orthogonaux à ceux-là.

1° L'élément d'arc d'un cercle tangent en O à Ox, et dont le plan fait avec xOy l'angle $\theta < \alpha$ sera $2\rho\, du$, u étant l'angle que fait OM avec le rayon issu de O du cercle précédent et ρ le rayon de ce cercle : $\rho = R \sin\theta$.

2° L'élément d'arc du cercle orthogonal issu de M sera, si $r = \overline{OM}$, égal à $\frac{r \cos u\, d\theta}{\sin\theta}$ puisque l'élément fait l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec la normale en M au plan xOT et puisque l'élément de normale est lui-même égal à $r \cos u\, d\theta$.

Donc

$$d\sigma = \frac{2\rho\, r \cos u\, d\theta\, du}{\sin\theta} = 2 R r \cos u\, d\theta\, du,$$

et l'intégrale à calculer n'est autre que

$$2R \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} d\theta \int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos u\, du = 4 R\alpha.$$

Le potentiel cherché sera donc

$$\frac{V_2(O)}{4\pi R} 4 R\alpha + \frac{V_1(O)}{4\pi R} 4 R(\pi - \alpha) = \frac{\alpha}{\pi} V_2(O) + \left(\frac{\pi - \alpha}{\pi}\right) V_1(O).$$

La limite de l'intégrale de Poisson est liée ici très simplement à l'angle α des deux plans xOy et xOT, puisqu'on trouve qu'*elle*

varie linéairement en fonction de cet angle α entre les valeurs $V_1(O)$ et $V_2(O)$.

Sur toute courbe tangente en O à une direction du demi-plan $y > 0$ (excepté la direction de Ox), la limite de l'intégrale de Poisson est $V_1(O)$. Sur toute courbe tangente en O à une direction du demi-plan $y < 0$, la limite est $V_2(O)$. Sur toute courbe non tangente en O à la sphère, telle que l'angle du demi-plan xOy avec le demi-plan déterminé par Ox et la tangente OT à la courbe soit α, la limite est

$$\frac{\pi - \alpha}{\pi} V_1(O) + \frac{\alpha}{\pi} V_2(O)$$

et *varie linéairement avec* α.

11. Sur ce dernier exemple, on peut voir que l'indétermination de la limite est plus grande lorsque le point intérieur P tend vers O sur une courbe tangente en O à une *direction exceptionnelle de la sphère*. Ici les directions Ox et Ox' sont exceptionnelles. Choisissons $V_1(O) = +1$ et $V_2(O) = -1$, par exemple en supposant que $V(M)$ est égal à $+1$ sur l'hémisphère $y > 0$ et à -1 sur l'hémisphère $y < 0$, le grand cercle C de la sphère tangent à Ox étant la courbe de discontinuité. Considérons un petit cercle Γ de la sphère, tangent à Ox situé par exemple dans l'hémisphère $y > 0$ et dont le plan fasse l'angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ avec le demi-plan xOy ($y > 0$). Menons une corde OT_1 dans le plan de ce petit cercle. Si P tend vers O sur la corde, l'intégrale de Poisson $V(P)$ tend vers $1 - \frac{2\alpha}{\pi}$. Si P tend sur OT_1 vers l'autre point d'intersection de la sphère avec OT_1, $V(P)$ tend vers 1. Il existe donc sur OT_1 un point P_1 où $V(P_1) = u_1$, u_1 étant telle valeur qu'on voudra comprise entre 1 et $1 - \frac{2\alpha}{\pi}$. Choisissons une série infinie de cordes OT_1, OT_2, ..., OT_n, ... toutes dans le plan de Γ et *tendant régulièrement dans l'ordre où on les énonce vers la direction* Ox de ce plan et choisissons arbitrairement une suite de valeurs u_1, u_2, ..., u_n, ... toutes comprises entre 1 et $1 - \frac{2\alpha}{\pi}$ mais n'ayant pas de limite déterminée. Sur cha-

cune des cordes OT_n se trouve un point P_n où $V(P_n) = u_n$. L'ensemble des points P_n admet O pour seul point limite. La ligne brisée $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$ est une courbe tangente en O à Ox, et, sur cette courbe, l'intégrale de Poisson $V(P)$ ne peut tendre vers aucune limite puisque les valeurs en $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ de $V(P)$ sont des nombres *arbitraires* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ compris entre 1 et $1 - \frac{2\alpha}{\pi}$. Si l'ensemble des valeurs u_n est partout dense dans l'intervalle $\left(1, 1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)$, on voit que *sur tout arc de la courbe* $P_1 P_2 \ldots P_n, \ldots$ *aboutissant en* O *si petit soit-il, l'intégrale de Poisson prendra toute valeur* U *comprise entre* 1 *et* $1 - \frac{2\alpha}{\pi}$, car une telle valeur pouvant toujours être comprise entre deux valeurs u_{n_1} et u_{n_2} d'indices assez grands pour que les points P_{n_1} et P_{n_2} tombent dans l'arc considéré, l'intégrale $V(P)$ prendra sur l'arc $P_{n_1} P_{n_2}$ toute valeur intermédiaire entre u_{n_1} et u_{n_2}, c'est-à-dire, en particulier, la valeur U considérée.

QUELQUES REMARQUES SUR LE SYSTÈME VECTORIEL DE MM. BURALI-FORTI ET MARCOLONGO;

PAR M. M. BOTTASSO.

L'analyse des *Lezioni di Meccanica razionale* de M. P. Burgatti, faite par M. E. Ouivet [1], montre que ce système vectoriel est encore l'objet de quelques préventions que je tâcherai de dissiper.

En premier lieu il faut noter que les conceptions, les définitions et les notations de notre système ont été établies après de nombreuses recherches historiques et critiques faites par MM. C. Burali-Forti et R. Marcolongo [2]. Par conséquent, on trouvera

[1] Voir ce *Bulletin*, t. XLI, juin 1917; première Partie, p. 177.

[2] Voir les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. XXIII, XXIV, XXV, XXVI, 1907-1908); le *Nuovo Cimento* (1907); l'*Enseignement mathema-*

bien raisonnable le désir que toute critique, sur un point quelconque du système, tienne compte des raisons exposées par ces auteurs sur le point discuté, en montrant pourquoi celles-ci doivent être repoussées, ou bien dans quelle part et comment elles doivent être modifiées. Ainsi on contribuera même à perfectionner cet « instrument scientifique de premier ordre » (comme M. Ouivet appelle justement le calcul vectoriel), tandis que toute affirmation gratuite, ou d'autorité, laisse naturellement chacun dans son premier avis, sans aucun progrès pour la question envisagée.

Dans les travaux indiqués, MM. Burali-Forti et Marcolongo ont montré, par exemple, l'illogisme de l'introduction des vecteurs *glissants*, des vecteurs *liés*, etc. Les vecteurs dits *libres* sont tout simplement les *vecteurs* d'Hamilton et forment une classe linéaire à trois dimensions; les soi-disant vecteurs *glissants* (exactement représentés par les bipoints des formes géométriques Peano-Grassmann) forment une classe non linéaire à cinq dimensions; et les vecteurs *liés* (couples dont chacun est formé par un point et un vecteur) forment une classe (non linéaire) à six dimensions. Selon le sens commun, ces dernières classes de vecteurs qualifiés devraient être contenues dans la classe des vecteurs, tandis que cela est évidemment impossible.

Ils ont encore repoussé la distinction entre vecteur *polaire* et vecteur *axial*, d'autant plus qu'on peut très bien s'en passer, même dans l'étude des phénomènes électriques et magnétiques [1], où l'on en proclamait la nécessité. L'introduction du vecteur axial, engendrée par la considération de l'axe et du moment d'un couple mécanique, correspond à une analyse incomplète des idées fondamentales. Ce qu'on nomme vecteur axial est le résultat d'une opération sur deux vecteurs (le vecteur du bras et celui d'une des forces, pour le couple mécanique). Il est précisément l'*index du bivecteur* formé par ces deux vecteurs dans le calcul de Peano-

---

tique (1907, 1909, 1910, 1911); les *Notes historiques et critiques* dans les *Éléments de calcul vectoriel*, etc. (Paris, Hermann, 1910); la préface du Tome I et l'appendice du Tome II de l'*Analyse vectorielle générale* (Pavie, Mattei et C°, 1912, 1913).

[1] Ainsi qu'il résulte, par exemple, du Chapitre IV (*Électrodynamique des corps au repos ou en mouvement*, p. 95-112) du Tome II de l'*Analyse vectorielle générale*.

Grassmann, ou même leur produit extérieur déjà considéré par Hamilton et Saint-Venant (1845), et c'est encore un vecteur. Il dépend du sens des rotations, mais il n'y a aucune raison pour le considérer comme un vecteur de nouvelle espèce, différent du vecteur commun (qu'on appelle alors *polaire*). De la sorte on devrait pareillement considérer le quotient de deux nombres réels comme un nombre d'espèce différente de celle des deux termes. Mais, quoique dans la définition du quotient il soit indispensable de tenir compte de l'ordre des nombres du couple, tandis que cela n'est pas nécessaire, par exemple, pour le produit, personne n'affirme la nécessité de distinguer en deux espèces les nombres qu'on tire de ces opérations. Tout le monde est d'accord pour envisager séparément les opérations indiquées avec leurs propriétés sans toutefois faire aucune distinction parmi les nombres auxquels elles s'appliquent et les résultats auxquels elles conduisent, en harmonie avec ce que MM. Burali-Forti et Marcolongo ont fait dans le champ vectoriel, conformément à la logique et au sens commun.

Je conclus en émettant le vœu que la critique puisse contribuer à perfectionner, où il est nécessaire, et à répandre partout la connaissance du calcul vectoriel sous la forme la meilleure; et surtout en souhaitant une application toujours plus large de ce puissant instrument scientifique à la Mécanique et à la Physique mathématique, pour donner une nouvelle impulsion à ces sciences.

L'AIRE DES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. MICHEL PETROVITCH,
à Belgrade (Serbie).

Considérons la surface P engendrée pas un arc s de courbe quelconque tournant autour d'un axe que nous prendrons pour l'axe Ox. Désignons :

1° Par A la valeur absolue de l'aire plane limitée par l'arc s, l'axe de rotation Ox et les ordonnées des deux extrémités de l'arc s ;

2° Par B l'aire plane ayant pour valeur : ou bien la valeur absolue de la demi-différence des carrés de ces deux ordonnées extrêmes (dans le cas où la courbe varie constamment dans un même sens entre les deux extrémités de l'arc s) ; ou bien la somme des valeurs absolues des demi-différences des ordonnées successives aux extrémités des arcs partiels variant toujours dans un même sens (en lesquels on peut partager l'arc s dans le cas où le sens de variation change entre ses extrémités) ;

3° Par R le côté du carré ayant pour surface $A + B$.

On a le résultat suivant :

THÉORÈME. — *L'aire de la surface* P *est égale à celle d'une circonférence de rayon* $r = \lambda R$, *où* λ *est un facteur numérique compris entre*

$$(1) \qquad \sqrt[3]{2} = 1,189207\ldots \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2} = 1,414213\ldots$$

quel que soit l'arc s *engendrant la surface de révolution considérée.*

Pour le montrer, supposons d'abord que la courbe varie constamment dans un même sens le long de l'arc s, en croissant ou en décroissant, et soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) les coordonnées de ses extrémités M_0 et M_1.

On aura

$$P = \int_{x_0}^{x_1} y\, ds,$$

et l'identité

$$1 = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

appliquée à

$$a = \sigma_1\, dx, \qquad b = \sigma_2\, dy,$$

faisant voir que

$$\frac{(\sigma_1\, dx + \sigma_2\, dy)^2}{2} \leqq ds^2 \leqq (\sigma_1\, dx + \sigma_2\, dy)^2,$$

fournit

$$ds = \theta(\sigma_1\, dx + \sigma_2\, dy),$$

où σ_1 et σ_2 représentent respectivement l'unité affectée des signes dx et dy le long de l'arc s, θ étant un facteur toujours compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1. Il s'ensuit que

$$P = 2\pi\theta\left[\sigma_1 \int_{x_0}^{x_1} y\, dx + \frac{\sigma_2}{2}(y_1^2 - y_0^2)\right],$$

et comme

$$\sigma_1 \int_{x_0}^{x_1} y\, dx = A, \qquad \sigma_2 \frac{y_1^2 - y_0^2}{2} = B,$$

on a

$$(2) \qquad P = 2\pi\theta(A + B) = \pi r^2,$$

où

$$(3) \qquad r = \lambda R = \lambda\sqrt{A + B}, \qquad \lambda = \sqrt{2\theta},$$

λ étant un facteur numérique variant bien entre les limites (1), conformément au théorème énoncé.

Considérons maintenant le cas où l'arc s change le sens de variation un nombre quelconque de fois entre ses extrémités M_0 et M_1. On peut alors le partager en arcs partiels, continus ou brisés

$$(4) \qquad M_0M', \quad M'M'', \quad M''M''', \quad \ldots,$$

affectés chacun d'un sens de variation invariable. Désignons :

1° Par A', A'', A''', ... les aires A relatives aux arcs respectifs (4) ;

2° Par B', B'', B''', ... les aires planes B relatives à ces mêmes arcs ;

3° Par P', P'', P''', ... les aires engendrées par la rotation des arcs respectifs (4) autour de l'axe Ox.

On aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{2\pi(A'-B')}{\sqrt{2}} \leqq P' \leqq 2\pi(A'+B'),$$

$$\frac{2\pi(A''-B'')}{\sqrt{2}} \leqq P'' \leqq 2\pi(A''+B''),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En ajoutant membre à membre on obtient

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}[\Sigma A^{(i)} + \Sigma B^{(i)}] \leqq \Sigma P^{(i)} \leqq 2\pi[\Sigma A^{(i)} + \Sigma B^{(i)}].$$

Or, la somme $\Sigma A^{(i)}$ est égale à l'aire totale A limitée par l'arc s, l'axe Ox et les deux ordonnées extrêmes de l'arc s; la somme $\Sigma B^{(i)}$ est égale à l'aire B ayant pour valeur la somme de valeurs absolues des demi-différences des ordonnées consécutives aux extrémités des arcs (4).

L'aire totale $P = \Sigma P^{(i)}$, engendrée par la rotation de l'arc s autour de Ox, a donc encore pour valeur (2), de sorte que le théorème subsiste dans le cas général où l'arc s change d'allure un nombre quelconque de fois entre ses extrémités.

On tire du théorème précédent la conséquence suivante :

Le rayon r de la circonférence ayant la surface égale à l'aire P a pour valeur

$$r = \omega R(1+\varepsilon), \tag{5}$$

où ω désigne la constante numérique

$$\omega = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{5}}{2} = 1,301710\dots, \tag{6}$$

et la valeur absolue de ε étant au plus égale à

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{5}} = 0,086497\dots \tag{7}$$

En posant

$$r' = \omega R,$$

on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \ldots = 1 + \delta,$$

où la valeur absolue de δ est au plus égale à

$$0,086427\ldots + (0,086427\ldots)^2 + \ldots < 0,1;$$

et, par suite :

En prenant pour r la valeur $1,30171 \times R$, *l'erreur commise n'atteint* 10 *pour* 100 *pour aucune surface de révolution.*

D'une manière analogue, l'aire P ayant pour valeur (2) peut s'écrire

$$P = 2\pi\omega' R(1+\varepsilon'), \tag{8}$$

où ω' désigne la constante numérique

$$\omega' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,853553\ldots, \tag{9}$$

la valeur absolue de ε' étant au plus égale à

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,171573\ldots \tag{10}$$

En prenant donc pour l'aire P *la valeur*

$$P = 0,853553 \times 2\pi R = 5,3637015 \times R, \tag{11}$$

l'erreur commise n'atteint 20 *pour* 100 *pour aucune surface de révolution.*

Remarquons qu'un des avantages appréciables de ces résultats est celui de fournir, à l'aide de planimètres ordinaires, et quelque irrégulière que puisse être la surface de révolution considérée, des limites entre lesquelles se trouve comprise l'aire P ainsi que le rayon correspondant P. Les limites ainsi obtenues sont les limites *le plus resserrées possibles* tant qu'on reste dans le cas général, car elles sont effectivement atteintes pour certaines surfaces de révolution, comme on le voit dans ce qui suit.

Cas limites. — La limite $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et par suite aussi la limite $\lambda = \sqrt[4]{2}$, est effectivement atteinte dans le cas où la surface de révolution est un cône de révolution dont l'angle des génératrices avec l'axe est de 45°. En effet, on a alors (par un déplacement convenable du sommet du cône sur l'axe x) $Oy = x$, et par suite

$$A = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2} = B,$$

de sorte que

$$(12) \qquad P = 2\pi\theta(y_1^2 - y_0^2) = 4\pi\theta(y_1 - y_0)\frac{y_1 + y_0}{2}$$
$$= 4\pi\theta(x_1 - x_0)\frac{y_1 + y_0}{2} = 4\pi\theta\, hd,$$

où h désigne la hauteur et d le diamètre moyen du tronc de cône considéré.

Or, la valeur exacte de P est

$$P = s\,2\pi\frac{y_1 + y_0}{2} = \sqrt{2}(y_1 - y_0) \times 2\pi\frac{y_1 + y_0}{2} = 2\pi\sqrt{2}\,hd,$$

ce qui, par la comparaison avec (12), fournit bien $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et l'on a

$$r = \sqrt[4]{2}\,R = \sqrt[4]{2}\sqrt{A + B} = \sqrt[4]{8}\sqrt{hd},$$

correspondant bien à $\lambda = \sqrt[4]{2}$. Ce cas limite correspond à

$$\sigma_1 dx = \sigma_2 dy.$$

D'autre part, la limite $\theta = 1$, et par suite la limite $\lambda = \sqrt{2}$, est effectivement atteinte dans le cas où la surface P est un cylindre de révolution. On a dans ce cas (ρ étant le rayon de la base du cylindre et h sa hauteur)

$$A = \rho(x_1 - x_0) = \rho h \qquad (B = 0),$$

de sorte que

$$P = 2\pi\theta\rho h,$$

ce qui montre bien que $\theta = 1$; on a alors

$$r = \sqrt{2(A + B)} = \sqrt{2\rho(x_1 - x_0)} = \sqrt{2\rho h},$$

ce qui correspond bien à $\lambda = \sqrt{2}$.

Exemples. — 1° Considérons l'aire de l'hémisphère engendrée par la rotation d'un quart de cercle de rayon ρ autour de son rayon pris pour l'axe Ox. On aura

$$A = \frac{\pi r^2}{4}, \qquad B = \frac{r^2}{2},$$

de sorte que

$$r = \sqrt{A + B} = \alpha\rho,$$

où α est la constante numérique

$$(13) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} = 1,133754\ldots.$$

Il s'ensuit que le rayon r de la circonférence ayant la même aire que l'hémisphère de rayon ρ est compris entre

$$\alpha\sqrt[4]{2}\,\rho \quad \text{et} \quad \alpha\sqrt{2}\,\rho,$$

c'est-à-dire entre

$$(14) \qquad 1,348268\rho \quad \text{et} \quad 1,603370\rho.$$

En prenant donc

$$(15) \qquad r = \frac{1}{2}(1,348268 + 1,603370)\rho = 1,475819\rho,$$

l'erreur commise, d'après le théorème précédent, n'atteindra pas 10 pour 100.

En réalité, la valeur exacte de r étant

$$(16) \qquad r = \rho\sqrt{2} = \rho \times 1,414213\ldots,$$

l'erreur commise en prenant la valeur (15) au lieu de (16) est de 4,1 pour 100.

2° Considérons, comme second exemple, l'aire du demi-ellipsoïde engendré par la rotation d'un quart d'ellipse aux demi-axes a et b, autour de l'axe a pris pour Ox.

L'aire du quart d'ellipse est

$$A = \frac{ab\pi}{4},$$

et l'on a en même temps

$$B = \frac{b^2}{2},$$

ce qui fournit

$$R = \sqrt{A + B} = b\sqrt{\frac{a\pi}{4b} + \frac{1}{2}}.$$

Il s'ensuit que le rayon r de la circonférence ayant la même aire que le demi-ellipsoïde considéré est compris entre

$$b\sqrt[4]{2}\sqrt{\frac{a\pi}{4b} + \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad b\sqrt{2}\sqrt{\frac{a\pi}{4b} + \frac{1}{2}}.$$

Pour $a = b$ on retrouve les formules précédentes correspondant au cas de l'hémisphère.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Belot (Émile). — *L'Origine des formes de la Terre et des Planètes.* 1 vol. gr. in-8°, XII-213 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1918.

Table des Chapitres. — Généralités sur l'ère primitive ou palæothermale. — Le niveau de base fondamental de l'architecture terrestre. — La période ignée. — La période diluvienne. — Les lois de l'architecture terrestre. — Les problèmes orogénique et épirogénique. — Le volcanisme naturel et expérimental. — Le magnétisme terrestre. — L'origine cosmique des formes planétaires.

MÉLANGES.

LES MÉTHODES MODERNES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX;

PAR M. BERTRAND DE FONTVIOLANT,
Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

AVANT-PROPOS.

1. Les méthodes modernes de la Résistance des matériaux ont pour objet deux des questions les plus importantes de cette branche de la Mécanique appliquée : la détermination des déformations élastiques et calorifiques, et le calcul des forces de liaison dans les pièces et les systèmes de pièces hyperstatiques.

Ces méthodes, fondées sur le théorème des forces vives et sur celui du travail virtuel, sont entièrement générales; elles s'appliquent uniformément à tous les cas qui peuvent se présenter. Elles offrent, sur les anciennes méthodes géométriques et cinématiques, l'avantage d'être d'une application plus rapide et de ne pas nécessiter l'introduction, dans les calculs, d'inconnues auxiliaires dont l'élimination est souvent très laborieuse.

Cependant elles sont assez peu répandues en France où, parmi les nombreux ouvrages didactiques sur la Résistance des matériaux, quatre seulement, à notre connaissance, font mention des méthodes modernes, avec des développements plus ou moins étendus, savoir :

Le Traité de *Statique graphique* de Maurice Levy (IVe Partie, 1886, Note I) contient un aperçu de la méthode du général Menabrea et de celle de Mohr, pour le calcul des efforts dans les systèmes articulés à barres surabondantes;

La traduction en français (1901), par Hahn, de la *Résistance des matériaux* de Föppl, expose la méthode générale de Castigliano, pour la détermination des déplacements élastiques et des

forces de liaisons surabondantes dans les pièces et les systèmes de pièces à fibres moyennes;

L'ouvrage de M. Ernest Flamard, intitulé *Calcul des systèmes élastiques de la Construction* (1918), rappelle la méthode de Castigliano et en fait des applications nombreuses et variées aux poutres droites, aux arcs et aux systèmes articulés;

Enfin, le *Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique* par M. Léon Lecornu (t. III, 1918) donne l'équation générale de l'élasticité des constructions, ainsi que la méthode de Castigliano, avec application à divers systèmes hyperstatiques.

Il nous a paru, dès lors, utile de présenter, ici, un exposé d'ensemble des diverses méthodes modernes, exposé que nous nous sommes efforcé de rendre aussi simple que possible, en nous attachant, d'ailleurs, à faire ressortir les liens étroits, qui unissent ces méthodes. Dans ce second ordre d'idées, nous montrons que la mise en compte des déformations calorifiques, qui jusqu'à présent n'avait été effectuée qu'au moyen du théorème du travail virtuel, peut aussi s'obtenir par application du théorème des forces vives. Nous établissons également que ce dernier théorème permet, aussi bien et plus simplement que le premier, de démontrer le beau théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy.

Il nous a semblé intéressant de faire intervenir la Théorie mathématique de l'Élasticité, afin de mettre en lumière la voie dans laquelle devraient, croyons-nous, être dirigées les recherches des savants relatives à cette théorie, en vue de permettre l'extension des méthodes modernes aux systèmes de corps isotropes et d'affranchir ainsi le calcul des constructions, des hypothèses de la Résistance des matériaux; mais il ne faut pas se dissimuler que de telles recherches sont extrêmement ardues, à cause des difficultés que présente l'intégration des équations aux dérivées partielles de la Théorie mathématique de l'Élasticité.

Les méthodes fondées sur le théorème des forces vives ont leur origine dans le Mémoire de Clapeyron sur le travail des forces élastiques (1858) [1], et dans celui du général Menabrea intitulé

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI, p. 908. — *Voir* aussi LAMÉ, *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides* (1866) : Théorème de Clapeyron, p. 86.

Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique (1868) (1). La première application du théorème du travail virtuel à l'étude des déformations élastiques, a été faite par Mohr, en ce qui concerne les systèmes articulés, sous le titre *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerksträger* (1874) (2).

Depuis, ces méthodes ont fait l'objet des recherches de nombreux savants et ingénieurs. On en trouvera un historique très complet, accompagné de minutieuses indications bibliographiques, dans la Thèse de doctorat présentée en 1914, à la Faculté des Sciences de Nancy, par M. Ernest Flamard (3).

Rappel de quelques notions de Théorie mathématique de l'Élasticité et de Résistance des matériaux.

Forces élastiques, en Théorie mathématique de l'Élasticité.

2. Considérons un corps solide élastique, en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures.

Soient (*fig.* 1) :

A un point quelconque de ce corps;

x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point, avant déformation du corps;

dx, dy, dz les longueurs d'arêtes, mesurées avant déformation, d'un parallélépipède infiniment petit, pris dans le corps, et dont A est l'un des sommets;

n_x, t_{xy}, t_{xz}; t_{yx}, n_y, t_{yz}; t_{zx}, t_{zy}, n_z les composantes parallèles aux axes, des forces élastiques, rapportées à l'unité de surface, sur les trois faces du parallélépipède, ayant le point A comme sommet commun et respectivement normales à Ox, Oy et Oz.

---

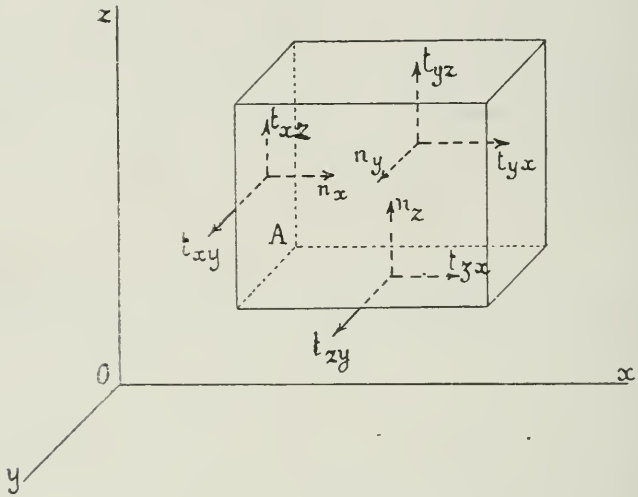
(1) *Voir* aussi une Note lue par le général Menabrea à la séance de l'Académie des Sciences du 31 mai 1858 (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 1056).

(2) *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1874, p. 223.

(3) Ernest Flamard (Inspecteur des Constructions métalliques à la Compagnie des Chemins de fer d'Orléans), *Étude sur les méthodes nouvelles de la Statique des constructions.*

Pour préciser le signe de ces composantes, nous considérons les forces élastiques comme les actions exercées par les parties du corps situées *à l'extérieur* du parallélépipède, sur celles situées *à*

Fig. 1.



l'intérieur, et nous convenons de les compter positivement dans le sens positif des axes.

Suivant l'usage adopté par les ingénieurs, nous dirons que n et t sont respectivement les *fatigues normales* et les *fatigues tangentielles* sur trois éléments plans, rectangulaires entre eux avant déformation, menés au point A. D'après la convention qui vient d'être faite, un élément est soumis à la compression ou à la traction, selon que la fatigue normale sur cet élément est positive ou négative.

On sait que, sur deux éléments rectangulaires entre eux, les fatigues tangentielles, dirigées normalement à l'intersection de ces éléments, sont égales entre elles, c'est-à-dire que l'on a

$$t_{zy} = t_{yz}, \qquad t_{xz} = t_{zx}, \qquad t_{yx} = t_{xy},$$

ce qui réduit, de neuf à six, le nombre des fatigues inconnues sur les trois éléments rectangulaires considérés.

Paramètres de la déformation élastique d'un corps isotrope.

3. Soient u, v, w les composantes parallèles aux axes, du déplacement élastique du point $A(x, y, z)$. Les six quantités

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = -\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz} = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \gamma_{zx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

définissent la déformation élastique du parallélépipède; nous les appellerons les *paramètres de la déformation élastique*.

ε_x, ε_y, ε_z sont les raccourcissements subis respectivement par les arêtes dx, dy, dz du parallélépipède, rapportés aux longueurs initiales de ces arêtes. Selon que la valeur de ε correspondant à une arête est positive ou négative, il y a réellement raccourcissement ou, au contraire, allongement de cette arête.

γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} sont les augmentations subies par les angles droits que forment entre elles, avant déformation, les arêtes dy et dz, dz et dx, dx et dy du parallélépipède. Selon que la valeur de γ correspondant à l'un de ces angles est positive ou négative, il y a réellement augmentation ou, au contraire, diminution de l'angle considéré. Les quantités γ portent le nom de *glissements* ou *distorsions*.

Les six fatigues normales et tangentielles s'expriment, en fonctions des six paramètres de la déformation élastique, par les formules suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} n_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x, & t_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \\ n_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y, & t_{zx} = \mu\gamma_{zx}; \\ n_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z, & t_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \end{cases}$$

dans lesquelles λ et μ désignent deux constantes physiques du corps considéré. Ces constantes sont liées aux modules d'élasticité longitudinale et transversale considérés en Résistance des matériaux, par les relations

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad G = \mu.$$

Inversement, les expressions des paramètres de la déformation élastique, en fonction des fatigues normales et tangentielles, sont

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[2(\lambda+\mu)n_x-\lambda(n_y+n_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{t_{yz}}{\mu};\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[2(\lambda+\mu)n_y-\lambda(n_z+n_x)], & \gamma_{zx} &= \frac{t_{zx}}{\mu};\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[2(\lambda+\mu)n_z-\lambda(n_x+n_y)], & \gamma_{xy} &= \frac{t_{xy}}{\mu}. \end{aligned}\right.$$

Travail des forces élastiques.
Potentiel interne d'un corps isotrope.

4. Au moyen des expressions ci-dessus des fatigues normales et tangentielles et des paramètres de la déformation élastique, on calcule aisément le travail accompli par les forces élastiques agissant sur les six faces du parallélépipède, pendant que celui-ci passe de son état naturel à un état de déformation défini soit par les valeurs des fatigues, soit par celles des paramètres. Soit ϖ le quotient de ce travail infiniment petit, par le volume $dx\,dy\,dz$ du parallélépipède; c'est le travail des forces élastiques, rapporté à l'unité de volume, au point $A(x, y, z)$. On trouve

$$(3)\quad \varpi = \frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}[(\lambda+\mu)(n_x^2+n_y^2+n_z^2)-\lambda(n_x n_y+n_y n_z+n_z n_x)] + \frac{1}{2\mu}(t_{yz}^2+t_{zx}^2+t_{xy}^2),$$

$$(4)\quad \varpi = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2+\mu(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2)+\frac{\mu}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2).$$

Le travail des forces élastiques, pour le parallélépipède considéré, est $\varpi\,dx\,dy\,dz$. Si donc on décompose le corps en une infinité de parallélépipèdes élémentaires, par des plans normaux aux axes de coordonnées, on voit que le travail total Π des forces élastiques, pour le corps entier, est

$$(5)\quad \Pi = \int\int\int \varpi\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple étant prise pour le volume entier occupé par le corps.

Il est clair que cette expression du travail total des forces élastiques s'applique également à un système de corps reliés entre eux d'une manière quelconque, déformé par des forces extérieures en équilibre, l'intégrale étant alors prise pour le volume total occupé par le système de corps.

On vérifie immédiatement que, si l'on dérive l'expression (5) de ϖ, successivement par rapport à $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xy}$, on retombe sur les expressions (1) de $n, \ldots, t_{xy}$, de sorte qu'on a

$$(6) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \varepsilon_x} = n_x, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \gamma_{xy}} = t_{xy}.$$

Les dérivées partielles de la fonction ϖ, par rapport aux six paramètres de la déformation élastique du parallélépipède, sont donc égales aux fatigues normales et tangentielles au point $A(x, y, z)$. On en conclut que les forces élastiques, appliquées sur les faces du parallélépipède, dépendent d'une fonction de forces et que cette fonction est $\varpi\, dx\, dy\, dz$. Par suite, pour le corps entier (ou pour un système de corps), les forces élastiques dépendent de la fonction de forces Π.

La déformation élastique d'un parallélépipède quelconque fait naître, à l'intérieur de celui-ci, des forces moléculaires; ces forces sont inconnues, mais il est facile d'évaluer le travail qu'elles ont accompli pendant la déformation; en effet, le système de points matériels composant ce parallélépipède étant au repos avant et après la déformation, la somme algébrique des travaux des forces extérieures et intérieures sollicitant ce système est nulle, en vertu du théorème des forces vives; par suite, le travail des forces moléculaires est égal et de signe contraire à celui des forces élastiques; sa valeur est donc $-\varpi\, dx\, dy\, dz$, pour le parallélépipède considéré, et $-\Pi$, pour le corps (ou le système de corps) entier. Conséquemment, en ce qui concerne l'évaluation du travail des forces moléculaires, tout se passe comme si celles-ci dépendaient d'une fonction de forces $-\Pi$ ou, ce qui revient au même, comme si elles dérivaient d'un potentiel Π. Nous dirons, en conséquence, que la fonction Π est le potentiel des forces moléculaires ou, par abréviation, le *potentiel interne* du corps (ou du système de corps) déformé, sous réserve toutefois que, si cette fonction changée de signe représente bien le travail

des forces moléculaires pendant la déformation, elle ne saurait être utilisée pour calculer les valeurs de ces forces qui demeurent inconnues.

Il résulte de ce qui précède que les forces moléculaires forment un *système conservatif :* leur travail ne dépend que de l'état final de déformation et non des états intermédiaires; il est exclusivement fonction des valeurs finales des paramètres de la déformation ou des valeurs finales des fatigues.

La fonction Π est susceptible d'une autre interprétation que voici :

La formule (4) montre que ϖ est essentiellement positif et qu'il s'annule lorsque le corps est à l'état naturel; il en est de même du potentiel total Π; ce dernier est donc minimum lorsque le corps est à l'état naturel, ce qui prouve (fait d'ailleurs évident) que cet état est celui d'équilibre stable des molécules du corps. Si l'on imagine que le corps déformé revient à son état naturel, par suite de la suppression des forces extérieures ayant déterminé sa déformation, le potentiel de ses forces moléculaires passe de la valeur Π à la valeur zéro; elles accomplissent donc un travail positif égal à Π, pendant que les molécules du corps reviennent à leur position d'équilibre stable; or, on sait que [1] l'énergie potentielle d'un système matériel occupant une position quelconque est égale au travail essentiellement positif des forces intérieures de ce système, lorsqu'il passe de cette position à sa position d'équilibre stable. Π est donc l'énergie potentielle interne du corps (ou du système de corps) déformé.

Paramètres de la déformation d'un corps isotrope, lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique.

5. Soit un corps libre; soumettons-le à l'action d'un système quelconque de forces extérieures en équilibre et supposons que sa température s'élève de τ degrés; soit α son coefficient de dilatation linéaire. La déformation subie par un parallélépipède quelconque, pris dans le corps, peut être considérée comme résultant de la superposition de la déformation purement élastique

[1] Maurice Levy, *Sur le principe de l'énergie*, 1888, p. 9.

due aux forces extérieures et de la dilatation calorifique. Or, cette dilatation ne modifie pas les angles que forment entre elles les arêtes du parallélépipède, lesquelles subissent simplement des allongements qui, rapportés à l'unité de longueur, sont égaux à $\alpha\tau$. Par suite, $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xy}$ désignant comme précédemment les six paramètres de la déformation purement élastique, les paramètres de la déformation élastique et calorifique sont

$$\varepsilon_x - \alpha\tau, \quad \varepsilon_y - \alpha\tau, \quad \varepsilon_z - \alpha\tau; \qquad \gamma_{yz}, \quad \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy}.$$

Ces expressions restent valables dans le cas d'un abaissement de température à condition, dans ce cas, de compter τ négativement.

Elles sont également valables pour les corps non libres, ces corps pouvant être considérés comme libres sous l'action des forces qui leur sont directement appliquées et des forces de liaison correspondantes.

Remarquons que le potentiel interne ne dépend évidemment que de la déformation élastique; par suite, si la déformation est à la fois élastique et calorifique, les expressions du potentiel interne restent celles données au n° 4.

Remarque.

6. Tout ce qui vient d'être dit des corps isotropes s'applique immédiatement aux pièces à fibres moyennes, considérées en Résistance des matériaux, si, selon le point de vue très clair et très précis du général Menabrea, on considère ces pièces comme des corps semi-rigides. Ce point de vue permet de passer des formules de la Théorie mathématique de l'Élasticité aux formules correspondantes de la Résistance des matériaux; mais il est plus simple d'établir directement ces dernières.

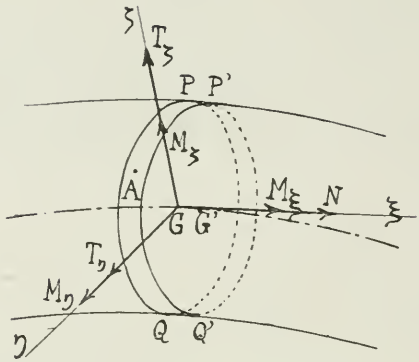
Forces élastiques, en Résistance des matériaux.
Éléments de leur réduction.

7. Soient (*fig.* 2) :

Un corps à fibre moyenne plane ou gauche;

PQ et P′Q′ deux sections infiniment voisines, normales à la fibre moyenne;

Fig. 2.



G et G′ leurs centres de gravité, d'abscisses curvilignes s et $s + ds$, comptées à partir d'une origine prise sur la fibre moyenne, à gauche de G;

$G\xi$ la tangente positive, en G, à la fibre moyenne;

$G\eta$ et $G\zeta$ les axes principaux d'inertie de la section PQ;

n, t_η, t_ζ les composantes parallèles aux axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, de la force élastique, rapportée à l'unité de surface, en un point quelconque $A(\eta, \zeta)$ de la section PQ.

Pour préciser le signe de ces composantes, nous considérons les forces élastiques dans la section PQ, comme les actions exercées par la partie du corps située *à gauche* de cette section, sur la partie située *à droite*, et nous convenons de les compter positivement dans le sens positif des axes de coordonnées.

n est la fatigue normale au point A, t_η et t_ζ sont les fatigues tangentielles; d'après la convention qui vient d'être faite, il y a compression ou traction, au point A, selon que n est positif ou négatif.

Les forces élastiques dans la section PQ forment un système équivalent aux forces extérieures appliquées à gauche de cette section. L'un comme l'autre de ces deux systèmes est réductible, au centre de gravité G de la section PQ :

A l'*effort normal* N dirigé suivant $G\xi$;

Aux *efforts tranchants* T_η et T_ζ dirigés suivant $G\eta$ et $G\zeta$;

Au *couple de torsion* M_ξ, d'axe $G\xi$;
Aux *couples de flexion* M_η et M_ζ, d'axes $G\eta$ et $G\zeta$.

Les couples M_ξ, M_η, M_ζ seront considérés comme positifs, s'ils tendent à faire tourner leurs bras de leviers dans le sens des rotations qu'il faudrait imprimer aux parties positives $G\eta$, $G\zeta$ et $G\xi$ des trois axes de coordonnées, pour les amener respectivement en coïncidence avec $G\zeta$, $G\xi$ et $G\eta$.

Paramètres de la déformation élastique d'un corps à fibre moyenne.

8. Dans la déformation élastique, la section PQ prend, par rapport à la section P′Q′ infiniment voisine, un déplacement relatif infiniment petit qui équivaut à une translation égale au déplacement relatif de son centre de gravité G et une rotation autour d'un axe passant par ce centre de gravité.

Soient :

1° $$\varepsilon\, ds, \quad \gamma_\eta\, ds, \quad \gamma_\zeta\, ds$$

les composantes de la translation suivant les trois axes de coordonnées

$$G\xi, \quad G\eta, \quad G\zeta,$$

composantes comptées positivement dans le sens positif des axes;

2° $$\theta_\xi\, ds, \quad \theta_\eta\, ds, \quad \theta_\zeta\, ds$$

les composantes de la rotation autour de ces mêmes axes, comptées positivement ou négativement dans les mêmes conditions que les couples de torsion et de flexion.

Les six quantités ε, γ_η, γ_ζ, θ_ξ, θ_η, θ_ζ définissent la déformation de la *tranche* du corps comprise entre les deux sections PQ et P′Q′; ce sont les *paramètres de la déformation élastique* de cette tranche.

ε est le raccourcissement, par unité de longueur, ou *raccourcissement unitaire* de l'élément de fibre moyenne $GG' = ds$; selon qu'il est positif ou négatif, il y a réellement raccourcissement ou, au contraire, allongement.

γ_η et γ_ζ sont les *glissements unitaires* de la section PQ suivant les deux directions $G\eta$ et $G\zeta$.

θ_ξ est l'*angle unitaire de la torsion*.

θ_η et θ_ζ sont les *angles unitaires de la flexion*, autour de $G\eta$ et de $G\zeta$.

Désignons par :

Ω l'aire de la section PQ,

I_ξ son moment d'inertie polaire, par rapport à son centre de gravité,

I_η et I_ζ ses moments d'inertie, par rapport à $G\eta$ et $G\zeta$, c'est-à-dire ses moments d'inertie principaux,

E et G les modules d'élasticité longitudinale et transversale.

Les six paramètres de la déformation de la tranche PQP'Q' sont liés aux éléments de la réduction des forces élastiques dans la section PQ (ou des forces extérieures appliquées à gauche de cette section) par les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} N = E\Omega\varepsilon, & T_\eta = G\Omega\gamma_\eta, & T_\zeta = G\Omega\gamma_\zeta; \\ M = GI_\xi\theta_\xi, & M_\eta = EI_\eta\theta_\eta, & M_\zeta = EI_\zeta\theta_\zeta. \end{cases}$$

Les fatigues normales et tangentielles, en un point quelconque $\Lambda(\eta, \zeta)$ de la section PQ, sont données par les formules

$$(8)\qquad \begin{cases} n = \dfrac{N}{\Omega} + \dfrac{\zeta M_\eta}{I_\eta} - \dfrac{\eta M_\zeta}{I_\zeta}, \\ t_\eta = \dfrac{T_\eta}{\Omega} - \dfrac{\zeta M_\xi}{I_\xi}, \\ t_\zeta = \dfrac{T_\zeta}{\Omega} + \dfrac{\eta M_\xi}{I_\xi}. \end{cases}$$

Travail des forces élastiques.
Potentiel interne d'un corps à fibre moyenne.

9. Pendant que la tranche PQP'Q' passe de son état naturel à un état quelconque de déformation, les forces élastiques appliquées sur les deux sections PQ et P'Q' limitant cette tranche accomplissent un certain travail ; soit ϖ le quotient de ce travail infiniment petit par l'élément $GG' = ds$ de fibre moyenne compris

entre ces deux sections : c'est le travail des forces élastiques, au point G, rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne.

En fonction des éléments de la réduction des forces élastiques développées dans la section PQ, par la déformation, ϖ est exprimé par la formule

$$(9) \qquad \varpi = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \frac{T_\zeta^2}{G\Omega} + \frac{M_\xi^2}{GI_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EI_\eta} + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}\right),$$

et, en fonction des paramètres de la déformation élastique de la tranche, par la formule

$$(10) \qquad \varpi = \frac{1}{2}\left(E\Omega\varepsilon^2 + G\Omega\gamma_\eta^2 + G\Omega\gamma_\zeta^2 + GI_\xi\theta_\xi + EI_\eta\theta_\eta + EI_\zeta\theta_\zeta\right).$$

Le travail des forces élastiques pour la tranche PQP'Q' est $\varpi\, ds$ et, par suite, pour le corps entier, il est

$$(11) \qquad \Pi = \int \varpi\, ds,$$

l'intégrale étant étendue à la longueur totale de la fibre moyenne. Cette formule est évidemment applicable à un système de corps reliés entre eux d'une manière quelconque, à condition de convenir que l'intégrale est étendue à la longueur totale des fibres moyennes de tous les corps composant le système.

Il y a *flexion plane* lorsque : 1° la fibre moyenne est une courbe plane, 2° le corps est de structure symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne, 3° les forces extérieures sont appliquées dans ce plan. Dans ce cas, si l'on suppose que $G\xi\zeta$ est le plan de la fibre moyenne, T_η, M_ξ, M_ζ, γ_η, θ_ξ, θ_ζ sont nuls et, par suite, on a simplement

$$(9') \qquad \varpi = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI}\right),$$

$$(10') \qquad \varpi = \frac{1}{2}\left(E\Omega\varepsilon^2 + G\Omega\gamma^2 + EI\theta^2\right),$$

en supprimant les indices ζ et η affectant les lettres T, M et I, γ et θ dans les formules (8) et (9).

De même qu'en Théorie mathématique de l'Élasticité, les forces élastiques dépendent d'une fonction de forces. Pour une tranche quelconque PQP'Q', cette fonction est $\varpi\, ds$; ceci résulte de ce

que, si l'on forme les dérivées partielles de l'expression (10) de ϖ, par rapport aux six paramètres de la déformation, on retombe sur les expressions (7) des six éléments de la réduction des forces élastiques; pour le corps entier (ou pour un système de corps), la fonction de forces est Π. On en conclut, comme précédemment (n° 4), que la fonction Π est le potentiel des forces moléculaires ou *potentiel interne du corps* (ou du système du corps) *déformé* et qu'elle représente également l'*énergie potentielle* de celui-ci.

Paramètres de la déformation,
lorsque celle-ci est à la fois élastique et calorifique.

10. On verrait, de la même façon que précédemment (n° 5), que les paramètres de la déformation *élastique et calorifique* d'une tranche quelconque sont

$$\varepsilon - \alpha\tau, \quad \gamma_\eta, \quad \gamma_\zeta, \quad \theta_\xi, \quad \theta_\eta, \quad \theta_\zeta,$$

$\varepsilon, \ldots, \theta_\zeta$ désignant les paramètres de la déformation purement élastique, α le coefficient de dilatation linéaire et τ la variation de température, positive en cas d'élévation, négative en cas d'abaissement.

Première méthode fondée sur le théorème des forces vives.

Principe fondamental des méthodes déduites du théorème des forces vives : Équation de Clapeyron ; extension de cette équation.

11. Considérons un corps élastique, isotrope ou à fibre moyenne, ou un système de pareils corps, satisfaisant aux conditions suivantes :

Ce corps, ou ce système, possède un certain nombre d'appuis *simples*, à *rotule* ou à *encastrement ;* il est donc astreint à des liaisons dites *liaisons d'appui* ou *liaisons extérieures*. Les corps composant le système sont reliés entre eux, d'une manière quelconque; ils sont donc astreints à des liaisons mutuelles, dites *liaisons intérieures au système*.

Les forces de liaisons extérieures sont ordinairement appelées *réactions d'appuis*.

On dit qu'un corps ou un système est *isostatique* ou *hyperstatique*, selon que les forces de liaison peuvent ou non être calculées par la Statique pure, c'est-à-dire au moyen des six conditions universelles d'équilibre.

Un corps, ou un système de corps, hyperstatique peut toujours être rendu isostatique, par la suppression de certaines de ses liaisons, sans que son état d'équilibre soit troublé, sous réserve de lui appliquer les forces de liaison correspondant aux liaisons supprimées. Les liaisons subsistant alors sont dites *liaisons statiques* et celles supprimées, *liaisons surabondantes*.

Un système de corps est hyperstatique *extérieurement* ou *intérieurement*, selon que ses liaisons surabondantes sont extérieures ou intérieures. Un système peut, d'ailleurs, être hyperstatique à la fois extérieurement et intérieurement.

On réalise la suppression des liaisons surabondantes extérieures soit par la suppression complète de certains appuis, soit par le remplacement d'appuis à rotule par des appuis simples, soit enfin par le remplacement d'appuis à encastrement par des appuis à rotule ou par des appuis simples.

La suppression des liaisons surabondantes intérieures s'obtient soit par la suppression d'un certain nombre de contacts existant entre les différents corps du système, soit par des modifications apportées à la façon dont ces contacts ont lieu.

Suivant le nombre et la nature des liaisons d'un corps (ou d'un système de corps) hyperstatique, il existe une seule manière, ou plusieurs, de le rendre isostatique. Ainsi, il n'y a pas d'autre manière de rendre isostatique un arc reposant sur deux appuis à rotules, que de remplacer l'un de ces deux appuis, par un appui simple ; par contre, on peut rendre isostatique un arc encastré à ses deux extrémités, soit en supprimant purement et simplement l'un des deux appuis à encastrement, soit en substituant à ceux-ci un appui à rotule et un appui simple.

Remarque. — Dans la suite, toutes les fois que la direction d'une force de liaison sera inconnue *a priori* (ce qui est le cas, par exemple, d'une liaison réalisée par un appui à rotule), nous

entendrons par force de liaison, non pas cette force même, mais chacune de ses composantes suivant deux directions arbitrairement choisies. Il importe, en effet, de ne faire intervenir, dans le calcul des forces de liaison, que des forces de directions connues d'avance.

12. Au corps ou au système de corps considéré, isostatique ou hyperstatique, peu importe, appliquons un système de forces et de couples extérieurs initialement nuls et croissant lentement jusqu'à des valeurs finales F et C. Il en résulte une déformation élastique : le point d'application de l'une quelconque des forces F subit un certain déplacement élastique absolu et la droite aa' joignant les points d'application des deux forces formant un couple C subit une certaine rotation élastique absolue.

Soient :

λ la projection du déplacement élastique du point d'application de la force F, sur la direction de cette force, projection comptée positivement dans le sens même de la force F, négativement en sens contraire;

φ la projection, sur l'axe du couple C, de la rotation élastique de la droite aa' (par *projection de la rotation* il faut entendre ici, et également dans la suite de la présente Note, la *projection du vecteur représentatif de la rotation*, cette projection étant d'ailleurs comptée positivement ou négativement selon qu'elle est de même sens que le vecteur représentatif du couple ou de sens contraire);

$\mathfrak{T}$ le travail accompli pendant la déformation, par les forces et couples extérieurs.

Le travail des forces de liaison est essentiellement nul.

Le travail des forces intérieures ou moléculaires est égal à $-\Pi$ (n° 4), Π désignant le potentiel interne du corps, ou du système de corps déformé.

En vertu du théorème des forces vives, on a

$$\mathfrak{T} = \Pi, \tag{12}$$

les points matériels du corps, ou du système, initialement au repos étant parvenus à un nouvel état de repos.

Donc, *le travail des forces et couples extérieurs, directement appliqués, est égal au potentiel interne du corps (ou du système de corps) déformé.*

Conséquemment, ce travail ne dépend que de l'état final de déformation; il est indépendant des états intermédiaires et, par suite, de la façon dont ont varié les forces et couples extérieurs [1]. Pour le calculer, on peut donc se fixer tel mode de variation qu'on juge convenable, de ces forces et couples. Admettons, dès lors, que, pendant la déformation, ils restent constamment dans les mêmes rapports entre eux, de sorte qu'à un état intermédiaire quelconque de la déformation, ils peuvent être représentés par $F\rho$ et $C\rho$, ρ désignant un nombre positif variant de 0 à 1 pendant la déformation complète. A ce même état de déformation, d'après le principe de la superposition des effets élastiques des forces, la projection du déplacement élastique du point d'application de la force $F\rho$, sur la direction de cette force, est $\lambda\rho$ et la projection, sur l'axe du couple $C\rho$, de la rotation élastique de la droite aa', est $\varphi\rho$, λ et φ désignant les valeurs de ces déplacements projetés à la fin de la déformation.

Pendant le passage de cet état de déformation à l'état infiniment voisin suivant, les forces et couples s'accroissant de $d(F\rho)$ et de $d(C\rho)$, les déplacements projetés correspondants varient de $d(\lambda\rho)$ et de $d(\varphi\rho)$; par suite, ces forces et couples accomplissent, entre ces deux états, un travail élémentaire $d\mathfrak{T}$ ayant pour valeur, aux infiniment petits du second ordre près,

$$d\mathfrak{T} = \sum F\rho\, d(\lambda\rho) + \sum C\rho\, d(\varphi\rho) = \left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right)\rho\, d\rho,$$

les sommes s'étendant à toutes les forces F et à tous les couples C.

Le travail total, pour la déformation entière, est donc

$$\mathfrak{T} = \left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right)\int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right).$$

---

[1] Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'à un système de forces et couples extérieurs donné ne puisse correspondre qu'un seul état de déformation du corps, ce qui, au point de vue physique, peut être considéré comme évident et a, d'ailleurs, été démontré analytiquement par Betti, Kirchhoff et Cosserat (APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, 1903, p. 515).

En portant cette expression de $\mathfrak{T}$ dans la relation (12) déduite du théorème des forces vives, on obtient l'équation fondamentale

$$(13) \qquad \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right) = \Pi,$$

qui n'est autre, sous une forme différente, que l'équation de Clapeyron [1]. La démonstration qui vient d'en être donnée est, comme on le voit, extrêmement simple.

13. Proposons-nous d'étendre l'équation de Clapeyron au cas où la déformation est, à la fois, élastique et calorifique, ce qui, pensons-nous, n'a pas encore été fait. A cet effet, considérons un système de corps isotropes, isostatique ou hyperstatique; soumettons-le à l'action de forces et couples extérieurs quelconques et d'une élévation de température initialement nuls et croissant lentement jusqu'à des valeurs finales F, C et τ (τ est compté à partir de la température à laquelle ont été réalisées les liaisons du système). Soient :

1° λ la projection du déplacement élastique et calorifique du point d'application de l'une quelconque F des forces extérieures, sur la direction de cette force;

2° φ la projection, sur l'axe de l'un quelconque C des couples extérieurs, de la rotation élastique et calorifique de la droite joignant les points d'application des deux forces formant ce couple;

3° $$\varepsilon_x - \alpha\tau, \quad \varepsilon_y - \alpha\tau, \quad \varepsilon_z - \alpha\tau, \quad \gamma_{yz}, \quad \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy}$$

les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'un parallélépipède élémentaire, découpé en un point quelconque (x, y, z) du système de corps, par des plans normaux aux axes de coordonnées (n° 5);

4° $$n_x, \quad n_y, \quad n_z$$

les fatigues normales, sur les trois faces de ce parallélépipède, ayant le point (x, y, z) comme sommet commun (n° 2);

---

[1] LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'Élasticité des corps solides*, 1866, p. 80.

5° $t_{xy}, t_{zx}, \quad t_{yz}, t_{xy}, \quad t_{zx}, t_{yz}$

les fatigues tangentielles sur ces mêmes faces;

6° $\varpi\, dx\, dy\, dz$ et Π les potentiels internes respectifs de ce même parallélépipède et du système de corps, déformés (n° 4).

Ces diverses notations sont relatives à l'état final de déformation du système; nous les conserverons pour un état intermédiaire quelconque, mais en les accentuant.

Considérons la déformation infiniment petite que prend le système de corps, entre les deux états de déformation intermédiaires, correspondant, le premier, aux valeurs F', C' et τ' des forces et couples extérieurs et de la variation de température; le second, aux valeurs $F' + dF'$, $C' + dC'$ et $\tau' + d\tau'$ de ces mêmes quantités. Pendant cette déformation, le travail des forces et couples extérieurs est égal à celui des forces élastiques, en vertu du théorème des forces vives. Calculons chacun de ces deux travaux :

Travail des forces et couples extérieurs. — Ce travail est, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\sum F'\, d\xi' + \sum C'\, d\varphi'.$$

Travail des forces élastiques. — Pendant la déformation infiniment petite considérée, les paramètres de la déformation élastique et calorifique d'un parallélépipède quelconque, varient de

$$d\varepsilon'_x - \alpha\, d\tau', \qquad d\varepsilon'_y - \alpha\, d\tau', \qquad d\varepsilon'_z - \alpha\, d\tau', \qquad d\gamma'_{yz}, \quad d\gamma'_{zx}, \quad d\gamma'_{xy},$$

et le potentiel interne de ce parallélépipède s'accroît de

$$d(\varpi'\, dx\, dy\, dz) = d\varpi'\, dx\, dy\, dz.$$

Le travail des forces élastiques, calculé pour la déformation purement élastique du parallélépipède, définie par les variations $d\varepsilon'_x, \ldots, d\gamma'_{xy}$ des six paramètres de la déformation élastique, est égal à l'accroissement $d\varpi'\, dx\, dy\, dz$ du potentiel interne; le travail de ces mêmes forces, calculé pour la déformation purement calorifique, définie par la variation $-\alpha\, d\tau'$ de l'unique paramètre de la déformation calorifique, est, aux infiniment petits d'ordre supé-

rieur près,

$$\begin{aligned}&-(n'_x\,dy\,dz)\alpha\,d\tau'\,dx-(n'_y\,dz\,dx)\alpha\,d\tau'\,dy-(n'_z\,dx\,dy)\alpha\,d\tau'\,dz\\&=-\alpha(n'_x+n'_y+n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

puisqu'à cette variation correspondent des allongements

$$\alpha\,d\tau'\,dx,\quad \alpha\,d\tau'\,dy,\quad \alpha\,d\tau'\,dz$$

des arêtes du parallélépipède et que le travail des forces élastiques tangentielles est nul, la déformation purement calorifique s'effectuant sans distorsions.

Par conséquent, le travail de déformation élastique et calorifique est, pour le parallélépipède considéré,

$$d\varpi'\,dx\,dy\,dz-\alpha(n'_x+n'_y+n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz,$$

et, pour le système de corps entier,

$$d\Pi'-\int\int\int\alpha(n'_x+n'_y+n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume occupé par le système.

L'équation exprimant l'égalité du travail des forces et couples extérieurs et du travail des forces élastiques, pendant la déformation infiniment petite considérée du système de corps, est donc

$$(14)\qquad \sum F'\,d\lambda'+\sum C'\,d\varphi'=d\Pi'-\int\int\int\alpha(n'_x+n'_y+n'_z)\,d\tau'\,dx\,dy\,dz.$$

L'égalité de ces deux travaux a lieu également pour la déformation complète du système, quel que soit, d'ailleurs, le mode de croissance des forces et couples extérieurs et de la température. Plaçons-nous dans l'hypothèse qu'à un état intermédiaire quelconque de la déformation, on ait, ρ désignant un nombre positif croissant de 0 à 1 pendant la déformation,

$$F'=F\rho,\qquad C'=C\rho,\qquad \tau'=\tau\rho,$$

et, par suite (ce qui peut être considéré comme évident au point de vue physique),

$$\lambda'=\lambda\rho,\qquad \varphi'=\varphi\rho,\qquad n'_x=n_x\rho,\qquad n'_y=n_y\rho,\qquad n'_z=n_z\rho.$$

Dès lors, dans cette hypothèse, l'équation (14) s'écrit

$$\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right)\rho\, d\rho = d\Pi' - \alpha\tau\left[\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz\right]\rho\, d\rho,$$

étant admis que l'élévation de température τ est la même en tous les points du système de corps.

En intégrant entre les limites $\rho = 0$ et $\rho = 1$, qui correspondent respectivement à l'origine et à la fin de la déformation, et en remarquant que l'intégrale de $d\Pi'$, prise pour la déformation complète, est égale à Π, potentiel interne du système déformé, on obtient

$$(15)\quad \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right) = \Pi - \frac{1}{2}\alpha\tau\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Telle est l'équation de Clapeyron étendue au cas où la déformation est, à la fois, élastique et calorifique. Bien qu'établie pour un mode de variation particulier des forces et couples extérieurs, et de la température, elle a lieu quelles que soient les valeurs finales F, C et τ de ces quantités, attendu que l'état final de déformation du système est indépendant des états intermédiaires. Mais son premier et son second membre ne représentent respectivement le travail des forces et couples extérieurs et le travail des forces élastiques, que dans le cas du mode de variation particulier dont il s'agit. Au contraire, dans l'équation (13) de Clapeyron, les deux membres représentent ces deux travaux, quel que soit le mode de variation des forces et couples extérieurs et de la température.

Si le système est soumis à un abaissement de température, il suffit de compter τ négativement dans la formule (15).

La démonstration qui précède, appliquée à un système de corps à fibres moyennes, donne

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\left(\sum F\lambda + \sum C\varphi\right) = \Pi - \frac{1}{2}\alpha\tau\int N\, ds,$$

N désignant l'effort normal en une section transversale quelconque de l'un quelconque des corps, ds l'élément de fibre moyenne compris entre cette section et la section infiniment voisine, et l'intégrale étant prise tout le long des fibres moyennes des corps du système.

On peut d'ailleurs passer directement de l'équation (15) à l'équation (16), en établissant que, dans tout système de corps à fibres moyennes, on a

$$(17) \qquad \int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = \int N\, ds.$$

Voici la démonstration de cette formule que nous aurons à utiliser plus loin.

Évaluons l'intégrale triple, d'abord pour une tranche infiniment mince comprise entre deux sections (S) et (S') de l'un quelconque des corps, faites en deux points G et G' de la fibre moyenne, dont la distance $GG' = ds$. A cet effet, considérons le volume de cette tranche comme formé d'un nombre infiniment grand de parallélépipèdes élémentaires, de volume $dx\, dy\, dz$, dont l'une des deux faces $dy\, dz$ serait placée dans la section (S) et dont les quatre arêtes dx seraient perpendiculaires à cette section. Les corps à fibres moyennes étant, par hypothèse, considérés comme rigides dans le sens transversal à ces fibres, les fatigues n_y et n_z sont nulles; d'autre part, aux infiniment petits du second ordre près et à la convergence près des deux sections (S) et (S'), convergence toujours très faible dans les corps de la Résistance des matériaux, on a

$$ds = dx.$$

Par suite, pour la tranche considérée,

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = ds \int\int n_x\, dy\, dz.$$

$n_x\, dy\, dz$ représente la force élastique sur l'élément de surface $dy\, dz$ de la section (S); l'intégrale double est la somme algébrique de ces forces, pour toute cette section, somme qui, par définition, est l'effort normal N. Donc, toujours pour la tranche considérée,

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = N\, ds.$$

Par conséquent, pour le système de corps entier, on a

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = \int N\, ds,$$

cette dernière intégrale étant prise tout le long des fibres moyennes de tous les corps du système. C. Q. F. D.

Théorème des dérivées du travail, de Castigliano.

14. Le corps ou le système de corps, isostatique ou hyperstatique, considéré précédemment (n° 12) ayant pris son état d'équilibre élastique sous l'action d'un système de forces et couples extérieurs F et C, donnons à ces forces et couples des accroissements infiniment petits, arbitraires $d\mathrm{F}$ et $d\mathrm{C}$.

Soient :

$d\lambda$ et $d\varphi$ les accroissements correspondants, positifs ou négatifs, des déplacements projetés λ et φ;

$d\mathfrak{T}$ l'accroissement correspondant du travail des forces et couples extérieurs;

$d\Pi$ l'accroissement correspondant du potentiel interne.

$d\mathfrak{T}$ représente le travail élémentaire accompli par les forces et couples F et C, pendant que ceux-ci croissent de $d\mathrm{F}$ et de $d\mathrm{C}$ et que, corrélativement, les déplacements projetés croissent de $d\lambda$ et $d\varphi$; il a donc pour expression, aux infiniment petits du second ordre près,

$$d\mathfrak{T} = \sum \mathrm{F}\, d\lambda + \sum \mathrm{C}\, d\varphi;$$

la substitution de cette expression dans la formule (12) (n° 12) différentiée, donne

$$d\Pi = \sum \mathrm{F}\, d\lambda + \sum \mathrm{C}\, d\varphi.$$

D'autre part, en différentiant l'équation fondamentale (13) (n° 12), on a

$$\sum \mathrm{F}\, d\lambda + \sum \lambda\, d\mathrm{F} + \sum \mathrm{C}\, d\varphi + \sum \varphi\, d\mathrm{C} = 2\, d\Pi.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières équations et en développant la différentielle totale $d\Pi$, on obtient la relation

$$\sum \lambda\, d\mathrm{F} + \sum \varphi\, d\mathrm{C} = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{F}}\, d\mathrm{F} + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{C}}\, d\mathrm{C},$$

qui ne peut être satisfaite que si l'on a séparément

$$(18) \qquad \lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial F}, \qquad \varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial C},$$

puisque les accroissements dF et dC sont arbitraires. D'où :

Théorème. — *Si un corps élastique, isotrope ou à fibre moyenne, ou un système de pareils corps (isostatique ou hyperstatique) est soumis à un système quelconque de forces et couples extérieurs :*

1° *La projection, sur la direction de l'une quelconque des forces, du déplacement élastique du point d'application de cette force, est égale à la dérivée partielle, par rapport à cette même force, du potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé.*

2° *La projection, sur l'axe de l'un quelconque des couples, de la rotation élastique de la droite joignant les points d'application des deux forces de ce couple, est égale à la dérivée partielle, par rapport à ce même couple, du potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé.*

Tel est le théorème de Castigliano [1], appelé par cet ingénieur *théorème des dérivées du travail*, dénomination qui se justifie par le fait que, d'après la formule (12) (n° 12), le potentiel interne est égal au travail des forces extérieures pendant la déformation.

15. Corollaire I. — *Si, parmi les forces extérieures, il y en a deux F égales et opposées, l'accroissement élastique Δl de la distance $l = AB$ de leurs points d'application A et B est égale à la dérivée partielle $\frac{\partial \Pi}{\partial F}$ du potentiel interne, par rapport à F.*

En effet, supposons d'abord que les deux forces soient inégales; désignons par F' celle appliquée en A, par F'' celle appliquée en B;

---

[1] Castigliano, *Nouvelle théorie de l'équilibre des systèmes articulés* (*Actes de l'Académie de Turin*, 1875); *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques* (Turin, 1879).

on peut toujours poser

$$(a) \qquad F' = k'F, \qquad F'' = k''F,$$

k' et k'' désignant deux nombres quelconques positifs.

Soient :

$\Delta' l$ l'accroissement élastique de la distance $AB = l$; accroissement qui est différent de Δl, mais lui devient égal dans le cas particulier où $k' = k'' = 1$;

λ' et λ'' les déplacements élastiques des deux points A et B, estimés suivant la direction commune AB des deux forces F' et F'', et comptés positivement, le premier, dans le sens de F', le second, dans le sens de F''.

On a évidemment

$$\Delta' l = \lambda' + \lambda''.$$

Mais, d'après le théorème de Castigliano,

$$\lambda' = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'}, \qquad \lambda'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial F''},$$

Π' désignant le potentiel interne qui diffère de Π, mais devient égal à Π dans le cas particulier où $F' = F'' = F$.

Par suite

$$\Delta' l = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} + \frac{\partial \Pi'}{\partial F''},$$

et, en faisant $F' = F'' = F$,

$$(b) \qquad \Delta l = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F'}\right)_{F'=F} + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F''}\right)_{F''=F}.$$

Or, Π', qui est fonction de F' et de F'', peut aussi être considéré comme fonction de F, puisque, par hypothèse, F' et F'' sont liés à F par les relations (a); ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial F} dF = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} dF' + \frac{\partial \Pi'}{\partial F''} dF'' = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} k' dF + \frac{\partial \Pi'}{\partial F''} k'' dF,$$

ou

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial F} = \frac{\partial \Pi'}{\partial F'} k' + \frac{\partial \Pi'}{\partial F''} k'',$$

ou encore, en faisant $k' = k'' = 1$, ce qui entraîne $F' = F'' = F$

et $\Pi' = \Pi$,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F} = \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F'}\right)_{F'=F} + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial F''}\right)_{F''=F}.$$

Par suite, l'expression (b) de Δl devient

$$\Delta l = \frac{\partial \Pi}{\partial F}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — *Si, parmi les forces extérieures, il y en a quatre appliquées en quatre points a, a', b, b' situés dans un même plan, si ces forces sont également situées dans ce plan, si celles appliquées en a et en a' constituent un couple* C, *et si celles appliquées en b et en b' constituent un couple égal et contraire au précédent, la droite aa' subit, relativement à la droite bb', une rotation élastique dont la projection sur l'axe du couple* C *est égale à la dérivée partielle $\frac{\partial \Pi}{\partial C}$ du potentiel interne par rapport à* C.

Ce corollaire découle de la seconde partie du théorème de Castigliano et se démontre de la même manière que le corollaire I.

Corollaire III. — *Dans le cas d'un corps à fibre moyenne, ou d'un système de pareils corps, si un couple* C *est appliqué à une section transversale quelconque, la projection, sur l'axe de ce couple, de la rotation élastique de cette section, est égale à la dérivée partielle, par rapport à ce même couple, du potentiel interne du corps, ou du système de corps déformé. De plus, s'il y a flexion plane, ce qui exige que l'axe du couple* C *soit normal au plan de flexion, cette dérivée représente la rotation même de la section.*

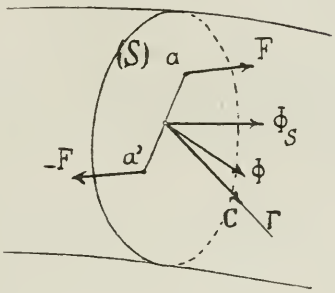
Soient (*fig.* 3) :

a et a' les points d'application, sur la section considérée (S), des deux forces F et $-$F constituant le couple C;

Γ la direction de l'axe de ce couple, laquelle est normale au plan de F et de $-$F et, par suite, à la droite aa' contenue dans ce plan;

Φ_S la rotation de la section (S);
Φ la rotation de la droite aa';
φ la projection de cette dernière rotation sur la direction Γ.

Fig. 3.



D'après la seconde partie du théorème de Castigliano, on a

$$\varphi = \frac{\partial H}{\partial C}.$$

Il suffit donc, pour établir le corollaire, de montrer que la projection de la rotation Φ_S de la section (S), sur la direction Γ de l'axe du couple C, est égale à la projection φ, sur cette même direction, de la rotation Φ de la droite aa'.

Or, la rotation Φ_S peut être décomposée en : 1° une rotation équipollente à Φ, qui amène la droite aa' située dans le plan de la section (S), de sa position initiale à sa position finale; 2° une rotation Ψ autour de aa'; de sorte qu'on a l'équipollence

$$\overline{\Phi_S} = \overline{\Phi} + \overline{\Psi}.$$

Projetons cette équipollence sur la direction Γ; Ψ étant normale à Γ a une projection nulle; donc la projection de la rotation Φ_S sur la direction Γ est égale à la projection φ de la rotation Φ sur cette même direction. C. Q. F. D.

Application du théorème de Castigliano, au calcul des déplacements élastiques.

16. Pour appliquer le théorème de Castigliano au calcul des déplacements élastiques dans les corps ou les systèmes de corps

isotropes, il est nécessaire de former l'expression du potentiel interne, en fonction des forces et couples extérieurs F et C. A cet effet, il faut calculer les six fatigues n et t (ou les six paramètres ε et γ) (nos 2 et 3), en fonction de ces mêmes forces et couples, et les substituer dans l'expression générale (3) (n° 4) [ou (4), même numéro] du potentiel rapporté à l'unité de volume. Or, en l'état présent de la Théorie mathématique de l'Élasticité, ce calcul n'est possible que dans un très petit nombre de cas particuliers. Il s'ensuit qu'actuellement du moins le théorème de Castigliano est en général inutilisable, en ce qui concerne les corps et les systèmes de corps isotropes.

Par contre, il est immédiatement applicable aux corps et aux systèmes de corps à fibres moyennes. En effet, l'expression générale de leur potentiel est, d'après les formules (9) et (11) (n° 9),

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \frac{T_\zeta^2}{G\Omega} + \frac{M_\xi^2}{GI_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EI_\eta} + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}\right) ds;$$

et, si l'on porte cette expression dans celles (18) (n° 14) de λ et de φ, on obtient

$$(19)\qquad \lambda = \int\left(\frac{N}{E\Omega}\frac{\partial N}{\partial F} + \frac{T_\eta}{G\Omega}\frac{\partial T_\eta}{\partial F} + \frac{T_\zeta}{G\Omega}\frac{\partial T_\zeta}{\partial F} - \frac{M_\xi}{GI_\xi}\frac{\partial M_\xi}{\partial F} + \frac{M_\eta}{EI_\eta}\frac{\partial M_\eta}{\partial F} + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}\frac{\partial M_\zeta}{\partial F}\right) ds,$$

$$(20)\qquad \varphi = \int\left(\frac{N}{E\Omega}\frac{\partial N}{\partial C} + \frac{T_\eta}{G\Omega}\frac{\partial T_\eta}{\partial C} + \frac{T_\zeta}{G\Omega}\frac{\partial T_\zeta}{\partial C} + \frac{M_\xi}{GI_\xi}\frac{\partial M_\xi}{\partial C} + \frac{M_\eta}{EI_\eta}\frac{\partial M_\eta}{\partial C} + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}\frac{\partial M_\zeta}{\partial C}\right) ds.$$

Dès lors, pour calculer λ et φ, il suffit d'effectuer, au centre de gravité de chaque section, la réduction des forces extérieures appliquées à gauche de cette section (forces de liaisons comprises), ce qui fait connaître N, ..., M_ζ en fonction de F et de C, puis de former les dérivées partielles $\frac{\partial N}{\partial F}, \ldots, \frac{\partial M_\zeta}{\partial F}, \frac{\partial N}{\partial C}, \ldots, \frac{\partial M_\zeta}{\partial C}$, et de substituer ces résultats dans les formules (19) et (20).

Si le corps (ou le système de corps) est soumis à la *flexion plane* (n° 9) l'expression du potentiel interne se simplifie nota-

blement et les formules (19) et (20) se réduisent à

$$(19') \qquad \lambda = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{\partial N}{\partial F} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\partial T}{\partial F} + \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} \right) ds,$$

$$(20') \qquad \varphi = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{\partial N}{\partial C} + \frac{T}{G\Omega} \frac{\partial T}{\partial C} + \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial C} \right) ds.$$

Les formules qui précèdent ne font connaître les déplacements projetés et les rotations projetées que pour les points d'application des forces extérieures et pour les sections d'application des couples extérieurs. Mais, par un artifice très simple, il est facile de les étendre à un point quelconque et à une section quelconque.

Ainsi, soit à déterminer le déplacement élastique d'un point quelconque A, en projection sur une direction arbitrairement choisie Δ. Appliquons, en ce point et suivant cette direction, *une force auxiliaire* $\mathfrak{F}$, de grandeur quelconque, en sus des forces et couples extérieurs donnés F et C; dès lors, les éléments N, T_η, ..., M_ζ de la réduction des forces élastiques dans une section quelconque (ou des forces extérieures de gauche), au centre de gravité de cette section, deviennent $N + \mathfrak{N}$, $+ T_\eta + \mathfrak{T}_\eta$, ..., $M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta$, si l'on désigne par $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ ce que seraient les éléments de cette réduction, si la force $\mathfrak{F}$ était seule appliquée, à l'exclusion des forces et couples F et C. Le déplacement élastique du point A, sous l'influence du système F, C, $\mathfrak{F}$, a pour expression, en projection sur la direction Δ,

$$\lambda = \int \left[\frac{N + \mathfrak{N}}{E\Omega} \frac{\partial(N + \mathfrak{N})}{\partial \mathfrak{F}} + \frac{T_\eta + \mathfrak{T}_\eta}{G\Omega} \frac{\partial(T_\eta + \mathfrak{T}_\eta)}{\partial \mathfrak{F}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta}{EI_\zeta} \frac{\partial(M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta)}{\partial \mathfrak{F}} \right] ds,$$

en vertu de la formule (19).

Pour obtenir le déplacement projeté cherché, il suffit évidemment de faire $\mathfrak{F} = 0$, ce qui entraîne $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{T}_\eta = 0$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta = 0$; il vient ainsi, observation faite que N, T_η, ..., M_ζ sont indépendants de $\mathfrak{F}$ et que, par suite, $\frac{\partial N}{\partial \mathfrak{F}}$, $\frac{\partial T_\eta}{\partial \mathfrak{F}}$, ..., $\frac{\partial M_\zeta}{\partial \mathfrak{F}}$ sont nuls,

$$(21) \qquad \lambda = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{F}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{F}} \right) ds.$$

De même, la rotation d'une section quelconque (S), en projection sur une direction Γ arbitrairement choisie, est exprimée par la formule

$$(22)\qquad \varphi = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{S}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{S}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{S}} \right) ds,$$

dans laquelle $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ sont les éléments de la réduction des forces élastiques dans une section quelconque, au centre de gravité de cette section, le corps, ou le système de corps, étant supposé soumis exclusivement à un *couple auxiliaire*, d'intensité $\mathfrak{S}$ quelconque, appliqué à la section (S) et de direction d'axe Γ.

Dans le cas de la flexion plane, la direction Δ doit, bien entendu, être située dans le plan de flexion et la direction Γ être normale à ce plan, et les formules (21) et (22) se réduisent à

$$(21')\qquad \lambda = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{F}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{F}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{F}} \right) ds,$$

$$(22')\qquad \varphi = \int \left(\frac{N}{E\Omega} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{S}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\mathfrak{S}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{S}} \right) ds:$$

φ est alors la rotation même de la section (S).

17. N, T_η, ..., M_ζ sont, dans le système de corps considéré, soumis aux forces et couples donnés F et C, les éléments de la réduction, au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces extérieures agissant à gauche de cette section, forces de liaisons comprises.

$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ sont les éléments de même nature, dans ce système soumis soit à la force auxiliaire $\mathfrak{F}$, soit au couple auxiliaire $\mathfrak{S}$.

Le calcul de ces divers éléments de réduction exige la détermination préalable des forces de liaisons.

Si le système considéré est *isostatique*, cette détermination ne relève que de la Statique pure et n'offre aucune difficulté.

S'il est *hyperstatique*, elle exige l'intervention de la Théorie de l'Élasticité ; nous traiterons plus loin cette question. Toutefois, on peut éviter cette intervention, en ce qui concerne le calcul des éléments $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$; voici comment :

Soient, dans un système hyperstatique quelconque, sollicité par les forces et couples F et C donnés, F_s les forces de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, forces qui sont inconnues. Considérons le système isostatique, obtenu par la suppression de toutes les liaisons surabondantes de ce système hyperstatique; soumettons-le aux forces et couples F, C et aux forces inconnues F_s : il prend un état de déformation identique à celui du système hyperstatique, soumis seulement aux forces et couples F et C; par conséquent, au lieu de calculer les déplacements élastiques projetés λ et les rotations élastiques projetées φ, dans le système hyperstatique, il revient au même de les calculer dans le système isostatique; dès lors, dans les formules (21) et (22) (n° 16) : 1° les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ deviennent relatifs à ce système isostatique, soumis soit à la force auxiliaire $\vec{\pi}$, soit au couple auxiliaire $\mathfrak{C}$; 2° les éléments de réduction N, T_η, ..., M_ζ deviennent également relatifs à ce même système isostatique, soumis aux forces et couples F, C et aux forces F_s inconnues; mais ces derniers éléments ont les mêmes valeurs que dans le système hyperstatique soumis seulement aux forces et couples F et C donnés, puisque l'état de déformation de ces deux systèmes est le même.

Donc, dans l'application des formules (21) et (22) [ou (21′) et (22′)] à un système hyperstatique, on peut considérer les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ... $\mathfrak{M}_\zeta$ (ou $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$), comme afférents au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, ce qui les rend calculables par la Statique pure; quant aux éléments de réduction N, T_η, ..., M_ζ, ils restent, par contre, afférents au système hyperstatique, et leur détermination nécessite l'intervention de la Théorie de l'Élasticité.

Théorème du général Menabrea.
Détermination des forces de liaisons surabondantes.

18. Considérons un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou plus généralement un système de pareils corps. Ce système est hyperstatique; il est en équilibre élastique, sous l'action de forces et couples directement appliqués F et C; et nous supposons,

ce qui est le cas le plus complexe, que ses liaisons surabondantes sont, les unes, extérieures, les autres, intérieures. Rendons-le isostatique (n° 11) par la suppression des dites *liaisons surabondantes*, en lui appliquant, d'ailleurs, les forces correspondant aux liaisons ainsi supprimées, afin que son état d'équilibre élastique ne soit pas troublé; soient F_{es} et C_{es} une force et un couple quelconques de liaisons extérieures surabondantes, F_{is} et C_{is} une force et un couple quelconques de liaisons intérieures surabondantes. Relativement au système rendu isostatique, ces forces doivent être considérées comme des forces directement appliquées, au même titre que les forces et couples F et C.

Or, du fait même des liaisons extérieures, la projection λ du déplacement élastique du point d'application de la force F_{es}, sur la direction de cette force, est nulle, et la rotation de la section d'application du couple C_{es} est également nulle. On a donc, d'après les formules générales (18) (n° 14),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{es}} = 0.$$

D'autre part, une liaison intérieure quelconque et, en particulier, une liaison intérieure surabondante, consiste ordinairement en ce qu'un point A d'une pièce P du système est astreint à rester invariablement lié à un point B d'une autre pièce Q. Les forces de liaison correspondantes sont une force F_{is} appliquée en A, à la pièce P et une force égale et contraire appliquée en B à la pièce Q; la distance AB de ces deux points, nulle avant déformation, est donc encore nulle après; par suite, en vertu du corollaire I (n° 15) du théorème de Castigliano, on a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{is}} = 0.$$

Enfin, si les liaisons surabondantes d'une pièce P avec une pièce Q consistent en ce que deux points a et a' de la première sont astreints à rester invariablement liés à deux points b et b' de la seconde, les forces de liaison correspondantes se composent de deux forces égales et opposées, appliquées en a et en b, et de deux autres forces égales et opposées appliquées en a' et en b'; si les deux forces appliquées en a et en a' constituent un couple C_{is},

les deux forces appliquées en b et en b' constituent un couple égal et contraire. Dans ce cas, la rotation élastique de la droite aa' relativement à la droite bb' étant nulle, on a, en vertu du corollaire II (n° 15),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_{is}} = 0.$$

En résumé, les dérivées partielles du potentiel interne du système déformé, par rapport aux forces et aux couples de liaisons surabondantes, tant extérieures qu'intérieures, sont nulles. Donc, les valeurs de ces forces et couples rendent maximum ou minimum ce potentiel; il reste à décider entre ces deux alternatives.

Soit A la valeur d'une quelconque des forces F_{es}, valeur satisfaisant, par conséquent, à l'équation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}} = 0.$$

Pour toute autre valeur attribuée arbitrairement à la force F_{es}, la projection, sur la direction de cette force, du déplacement de son point d'application, n'est pas nulle : elle a pour expression

$$\lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}};$$

or il est évident que si, à partir de cette valeur arbitraire de la force F_{es}, celle-ci prend un accroissement dF_{es}, la variation correspondante $d\lambda$ du déplacement projeté λ est de même sens que F_{es}, c'est-à-dire positive, de sorte qu'on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial F_{es}} > 0$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F_{es}^2} > 0;$$

cette inégalité, établie pour toute valeur de F différente de A, a lieu également pour $F_{es} = A$, attendu que, le potentiel Π étant du second degré en F_{es} [1], sa dérivée seconde par rapport à

[1] Π est une fonction du second degré des fatigues normales et tangentielles; or, ces fatigues sont des fonctions linéaires des forces extérieures qui les produisent; donc Π est une fonction du second degré des forces extérieures et, en particulier, de la force F_{es}.

cette variable est indépendante de la valeur attribuée à celle-ci.

On démontre, de la même façon, que les dérivées secondes de Π, par rapport à C_{es}, F_{is} et C_{is} sont positives. Certains auteurs en concluent que Π est minimum et énoncent de la manière suivante, ou d'une manière approchante, le théorème du général Menabrea :

Dans un système hyperstatique, formé de corps isotropes ou à fibres moyennes, les valeurs que prennent, en fait, les forces et couples de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, rendent minimum le potentiel interne du système, considéré comme une fonction de ces forces et couples.

Cet énoncé est très séduisant; mais il va au delà de ce qui est réellement démontré : en effet, la condition du minimum de Π est que la différentielle totale de cette fonction soit positive, pour les valeurs de $F_{es}, \ldots, C_{is}$ qui annulent les dérivées partielles premières $\frac{\partial \Pi}{\partial F_{es}}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial C_{is}}$; or, il est seulement établi que, pour ces valeurs, les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F_{es}^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial C_{is}^2}$ sont positives. Aussi, croyons-nous devoir nous en tenir à l'énoncé suivant :

Théorème. — *Dans un système hyperstatique, formé de corps isotropes ou à fibres moyennes, les valeurs que prennent, en fait, les forces et couples de liaisons surabondantes extérieures et intérieures, annulent les dérivées partielles premières du potentiel interne considéré comme une fonction de ces forces et couples. En outre, si, dans cette fonction, on remplace ces mêmes forces et couples par leurs valeurs effectives, sauf toutefois l'une de ces forces ou l'un de ces couples, la fonction d'une seule variable ainsi obtenue est minimum par la valeur effective de cette force ou de ce couple.*

Au surplus, en ce qui concerne les applications, la question de savoir si le potentiel interne est ou non minimum est dénuée d'intérêt : le seul point qui importe est que les valeurs effectives des forces et couples de liaisons surabondantes annulent les dérivées partielles premières de ce potentiel.

Ce théorème est, comme on le voit, un corollaire du théorème de Castigliano; mais, antérieurement aux travaux de cet ingénieur, il avait été énoncé, sous la dénomination de « Principe de minimum du travail élastique », par le général Menabrea (¹), pour les systèmes articulés; et, dès cette époque, il se trouvait également donné pour un système quelconque de corps à fibres moyennes, ces corps pouvant, suivant une remarque de Mohr et de Winckler, être considérés comme un cas particulier des systèmes articulés (²).

Nous indiquerons le mode d'emploi du théorème de Menabrea, pour le calcul des forces et couples de liaisons surabondantes, dans les corps ou les systèmes de corps à fibres moyennes, lorsque nous aurons étendu ce théorème au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique.

Extension du théorème de Castigliano au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique.

19. Cette extension a été faite par M. Ernest Flamard, dans sa Thèse déjà citée, en ce qui concerne les systèmes de corps à fibres moyennes, au moyen du théorème du travail virtuel. Nous allons l'effectuer, au moyen du théorème des forces vives, tant pour les systèmes de corps isotropes que pour ceux à fibres moyennes.

Considérons un système de corps *isotropes*, isostatique ou hyperstatique, déformé par des forces et couples extérieurs F et C et par une élévation de température τ comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées les liaisons du système. (Dans le cas d'un abaissement de température, il suffira d'affecter τ du signe moins.) Appliquons à cette déformation l'équation de Clapeyron généralisée (15) (n° 13)

$$\sum F\lambda + \sum C\varphi = 2H - \int\int\int \alpha\tau(n_x + n_y + n_z)\,dx\,dy\,dz,$$

(¹) Menabrea, *Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique* (Turin, 1868). — *Voir* aussi une Note lue par le général Menabrea, à la séance de l'Académie des Sciences du 31 mai 1858 (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 1056).

(²) Maurice Levy, *La Statique graphique et ses applications aux constructions*, 4e Partie, 1888, p. 141.

dans laquelle :

λ est la projection du déplacement élastique et calorifique du point d'application de l'une quelconque F des forces extérieures, sur la direction de cette force;

φ la projection, sur l'axe de l'un quelconque C des couples extérieurs, de la rotation élastique de la droite joignant les points d'application des deux forces formant ce couple;

Π le potentiel interne du système de corps déformé;

n_x, n_y, n_z les fatigues normales sur trois éléments menés normalement aux axes de coordonnées, en un point quelconque (x, y, z) du système.

Cette équation a lieu quel que soit le système de valeurs attribué à F, C et τ; par suite, l'équation obtenue en la différentiant par rapport à ces variables indépendantes et par rapport aux quantités λ, φ, Π, n_x, n_y, n_z qui en dépendent, a lieu également; on peut donc écrire

$$(a)\qquad \sum F\,d\lambda + \sum \lambda\,dF + \sum C\,d\varphi + \sum \varphi\,dC$$
$$= 2\,d\Pi - \int\int\int \alpha[(n_x + n_y + n_z)\,d\tau + \tau\,d(n_x + n_y + n_z)]\,dx\,dy\,dz;$$

et, dans cette dernière équation, les accroissements dF, dC et $d\tau$ sont arbitraires.

Envisageons la déformation infiniment petite que prend le système de corps, entre les deux états de déformation correspondant, le premier, aux valeurs F, C et τ des forces et couples extérieurs et de l'élévation de température, le second, aux valeurs $F + dF$, $C + dC$ et $\tau + d\tau$ de ces quantités. Pendant cette déformation, le travail des forces et couples extérieurs est égal au travail des forces élastiques; l'équation exprimant ce fait a été établie précédemment : c'est celle (14) (n° 13), laquelle, suppression faite des accents, ce qui n'est qu'une question de notation, est

$$(b)\qquad \sum F\,d\lambda + \sum C\,d\varphi = d\Pi - \int\int\int \alpha(n_x + n_y + n_z)\,d\tau\,dx\,dy\,dz.$$

Retranchons membre à membre les équations (a) et (b); il

vient

$$(c)\qquad \sum \lambda\, dF + \sum \varphi\, dC = d\Pi - \int\int\int \alpha\tau\, d\,(n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz.$$

Les fatigues $n_x, \ldots, \gamma_{xy}$ et, par suite, le potentiel interne Π dépendent des forces et couples extérieurs F et C directement appliqués et des forces de liaisons. Si le système est hyperstatique, celles-ci dépendent non seulement de F et de C, mais aussi de la température, un tel système n'étant pas librement dilatable; de sorte que, dans l'équation (c), n_x, n_y, n_z et Π sont fonction de F, de C et de τ. Si le système est isostatique, ces quantités sont, au contraire, indépendantes de τ, un tel système étant librement dilatable.

Ceci posé, supposons d'abord que le système considéré soit *isostatique* et, dans cette hypothèse, développons dans l'équation (c) les différentielles totales $d\Pi$ et $d(n_x + n_y + n_z)$; il vient, étant admis que la variation de température est la même en tous les points du système,

$$\begin{aligned}
&\sum \lambda\, dF + \sum \varphi\, dC \\
&= \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F}\, dF + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial C}\, dC - \alpha\tau \int\int\int \left(\sum \frac{\partial (n_x + n_y + n_z)}{\partial F}\, dF \right) dx\, dy\, dz \\
&\qquad - \alpha\tau \int\int\int \left(\sum \frac{\partial (n_x + n_y + n_z)}{\partial C}\, dC \right) dx\, dy\, dz \\
&= \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F}\, dF + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F}\, dC - \alpha\tau \sum \frac{\partial}{\partial F} \left[\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz \right] dF \\
&\qquad - \alpha\tau \sum \frac{\partial}{\partial C} \left[\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz \right] dC;
\end{aligned}$$

ou, en posant

$$(23)\qquad \Pi = \Pi - \alpha\tau \int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\sum \lambda\, dF + \sum \varphi\, dC = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial F}\, dF + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial C}\, dC.$$

Pour que cette dernière équation soit satisfaite, il faut qu'on ait séparément

$$(24)\qquad \lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial F}, \qquad \varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial C},$$

puisque les accroissements dF et dC sont arbitraires.

Les formules (23) et (24), établies pour les systèmes *isostatiques*

tiques, restent valables pour les systèmes *hyperstatiques*. En effet, soient, pour un système hyperstatique quelconque donné, F_s les forces de liaisons surabondantes tant intérieures qu'extérieures. Considérons le système isostatique, obtenu par la suppression de toutes les liaisons surabondantes de ce système hyperstatique; soumettons-le aux forces et couples F, C, F_s et à la variation de température τ; les formules (23) et (24) lui sont applicables; or, son état de déformation est identiquement le même que celui du système hyperstatique donné, soumis aux forces et couples F et C et à la variation de température τ, et, par suite, les diverses quantités λ, φ, H, n_x, n_y, n_z ont les mêmes valeurs dans ce système isostatique que dans le système hyperstatique; donc les formules (23) et (24) sont également applicables à ce dernier système. C. Q. F. D.

Les deux formules (24) ne diffèrent de celles (18) (n° 14) que par le remplacement de la fonction H par la fonction H; *elles se traduisent donc, sauf ce remplacement, par une proposition identique au théorème de Castigliano.*

La démonstration qui précède, appliquée au cas d'un système de corps à *fibres moyennes*, conduit encore aux formules (24), mais avec

$$\text{(25)} \qquad H = H - \alpha\tau \int N\, ds.$$

On peut, d'ailleurs, passer directement de l'expression (23) de H à l'expression (25) en remarquant que, d'après la formule (17) (n° 13), on a, pour tout système de corps à fibres moyennes,

$$\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = \int N\, ds.$$

Notons, en passant, que si, dans la formule (25), on remplace H par son expression résultant des formules (11) et (9) (n° 9), on obtient

$$\text{(26)} \qquad H = \frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2\alpha\tau N \right) + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \ldots + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta} \right] ds.$$

Dans le cas de la flexion plane, cette dernière formule se réduit à

$$\text{(26')} \qquad H = \frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2\alpha\tau N \right) + \frac{T^2}{G\Omega} + \frac{M^2}{EI} \right] ds.$$

20. La quantité H peut s'interpréter comme suit :

Soient, dans un système de corps à fibres moyennes, hyperstatique, soumis à des forces et couples F et C, ainsi qu'à une variation de température τ, F_s les forces de liaisons surabondantes tant intérieures qu'extérieures. Sur le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, faisons agir les forces et couples F, C, F_s et la variation de température τ; il prend un état de déformation identique à celui du système hyperstatique, soumis aux forces et couples donnés F et C et à la variation de température. Imaginons que cette déformation s'effectue en deux temps, comme suit :

Pendant le premier temps, le système isostatique est soumis aux forces et couples F, C, F_s, de sorte que sa déformation est purement élastique et que, par suite, le travail accompli par les forces élastiques est H.

Pendant le second temps, il est soumis à la variation de température; les forces élastiques demeurent constantes, le système isostatique étant librement dilatable, et elles accomplissent un travail dont la valeur est, pour une tranche d'épaisseur ds, $-N\alpha\tau\, ds$, et, pour le système entier, $-\alpha\tau\int N\, ds$.

Le travail total des forces élastiques pendant la déformation complète, élastique et calorifique, est donc

$$H - \alpha\tau\int N\, ds = H:$$

et, si le système est formé de corps isotropes, on trouve, de même, que ce travail total est

$$H - \alpha\tau\int\int\int (n_x + n_y + n_z)\, dx\, dy\, dz = H$$

M. Ernest Flamard appelle la quantité H *travail total de déformation d'un système élastique soumis à une variation de température*.

Il est à remarquer que cette dénomination est toute conventionnelle; elle n'est exacte que sous réserve que la déformation s'effectue en deux temps et dans l'ordre indiqué plus haut. En effet, si la variation de température précédait, au contraire,

l'application des forces et couples F, C, et F_s, le travail des forces élastiques se réduirait à Π; si les deux actions étaient simultanées, le travail des forces élastiques serait compris entre Π et Π.

Les formules (24) n'en constituent pas moins une extension du théorème de Castigliano, au cas où la déformation est à la fois élastique et calorifique.

Ce qui précède s'applique évidemment aussi aux systèmes isostatiques.

Application du théorème de Castigliano généralisé, au calcul des déplacements élastiques et calorifiques, dans les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes.

21. Les expressions générales (24) (n° 19) des déplacements et rotations élastiques et calorifiques se développent exactement de la même manière qu'ont été développées, au n° 16, les expressions (18) (n° 14) des déplacements et rotations purement élastiques. On trouve ainsi

$$(27)\quad \lambda = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \bar{\mathfrak{F}}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\bar{\mathfrak{F}}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\bar{\mathfrak{F}}} \right] ds,$$

$$(28)\quad \varphi = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\bar{\mathfrak{T}}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\bar{\mathfrak{T}}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\bar{\mathfrak{T}}} \right] ds.$$

Ces formules ne diffèrent de celles correspondantes (21) et (22) (n° 16) que par le remplacement de $\frac{N}{E\Omega}$ par $\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right)$. Lorsqu'on les appliquera à un système hyperstatique, on aura soin, selon les indications données précédemment (n° 17, *in fine*), de calculer les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ non pas dans le système hyperstatique considéré, mais dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique.

Dans le cas où la flexion est plane, on a simplement

$$(27')\quad \lambda = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\bar{\mathfrak{F}}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\bar{\mathfrak{F}}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\bar{\mathfrak{F}}} \right] ds.$$

$$(28')\quad \varphi = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\bar{\mathfrak{T}}} + \frac{T}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}}{d\bar{\mathfrak{T}}} + \frac{M}{EI} \frac{d\mathfrak{M}}{d\bar{\mathfrak{T}}} \right] ds.$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REY PASTOR (J.). — TEORÍA DE LA REPRESENTATIÒ CONFORME (*Théorie de la représentation conforme*), Conférences rédigées par M. E. TERRADAS. 1 vol. in-8°. 115 pages. Publications de l'*Institut d'Estudis catalans*, Barcelona, *s. d.*

Au printemps de 1915, M. Rey Pastor a fait, à l'Institut des études catalanes de Barcelone, une série de huit conférences sur la représentation conforme. Ces conférences, rédigées par M. Terradas et traduites en catalan, forment un petit Ouvrage de la Collection des Cours de Physique et de Mathématique dirigée par ce savant.

La théorie de la représentation conforme, qui a son origine dans le problème des cartes géographiques, s'est développée jusqu'à se rattacher aux questions les plus importantes de l'Analyse et de la Physique mathématique. Au début, il s'agissait d'établir, entre une portion de la sphère et une portion du plan, une correspondance univoque et réciproque avec conservation des angles (on ne pouvait songer à conserver les longueurs) et, par conséquent, avec similitude des éléments infiniment petits. Les anciennes projections d'Hipparque et de Mercator et celles, plus récentes, de Lambert répondaient à ce but. Lagrange résolut le problème pour les surfaces de révolution et introduisit dans la question la notion de variable complexe. Gauss, enfin, traita le problème général de la représentation conforme de deux régions appartenant respectivement à deux surfaces données.

Jusqu'à ce moment le problème est demeuré local : il faut établir une correspondance entre les régions voisines de deux points déterminés de deux surfaces. Avec Riemann, la question prend un aspect nouveau et le problème cesse d'être local.

Voici l'énoncé du problème de Riemann :

Étant données deux aires planes (D) *et* (*d*), *déterminer une fonction* $Z = f(z)$ *qui permette d'effectuer une représentation conforme de l'une des aires sur l'autre, de telle manière qu'à un point pris à l'intérieur de l'une des deux aires corresponde*

un seul point à l'intérieur de l'autre et que, aux points du contour de l'une des aires, correspondent les points du contour de l'autre.

D'ailleurs, si l'on a effectué la représentation conforme des aires (D) et (d) sur l'aire d'un cercle de rayon 1, la représentation conforme de (D) sur (d) s'en déduit aussitôt : on peut donc toujours supposer, dans le problème de Riemann, que le domaine (d), par exemple, est un cercle de rayon 1. De ce problème Riemann donne dans sa thèse une solution aussi simple que belle, au moins en ce qui concerne les points intérieurs des aires. Cette solution repose, il est vrai, sur le principe de Dirichlet dont la démonstration rigoureuse n'apparut que plus tard, mais l'introduction de la fonction de Green est tout à fait naturelle et lorsque, en 1900, M. Osgood établit l'existence de cette fonction de Green pour un domaine simplement connexe quelconque dont le contour comprend plus d'un point, le problème de la représentation conforme pour les points intérieurs et pour un domaine quelconque se trouva complètement résolu.

L'étude de la correspondance des points des contours a été l'objet d'une série de recherches fort intéressantes. La démonstration de Riemann laissait cette question dans l'ombre. Schwarz montra que la correspondance est univoque et continue pour les points du contour de (D) quand celui-ci est formé d'un seul arc analytique; M. Picard établit la même proposition pour un contour formé de plusieurs arcs analytiques; M. Painlevé, pour le cas d'un contour dont la tangente varie d'une manière continue.

Une remarque de Poincaré, faite en 1883, devait de nouveau changer l'aspect de la question : la représentation conforme de l'intérieur de (D) sur l'intérieur de (d) est déterminée à une homographie près; elle est entièrement déterminée si l'on fait correspondre deux éléments de contact choisis arbitrairement, l'un dans (D), l'autre dans (d). Il en résulte que la correspondance des points des contours ne doit plus figurer dans l'énoncé du problème : c'est une condition surabondante. La correspondance entre les points intérieurs entraîne ou non comme conséquence la correspondance entre les points des contours. Dans le premier cas, le problème de Riemann est possible; dans le second, il n'est possible que

pour les points intérieurs. C'est M. Carathéodory qui, en 1913, a étudié le premier d'une manière complète la correspondance entre les points des contours et montré, en particulier, que le problème de Riemann est possible pour des domaines limités par des courbes de Jordan. Cette étude a été reprise par différents auteurs; on a même pu rattacher cette question, d'une manière simple, aux éléments de la théorie des fonctions de variable complexe et à la méthode indroduite par M. Picard pour le cas où la frontière est formée d'arcs analytiques.

L'étude des problèmes précédents a été étendue au cas des domaines multiplement connexes et à celui de domaines appartenant à une surface de Riemann formée d'un nombre fini ou d'une infinité de feuillets; par ce côté, la question se relie à l'important problème de l'uniformisation des fonctions.

On voit la richesse de ce sujet, qu'il embrasse une grande partie du champ de la théorie des fonctions analytiques et se relie à bien des problèmes importants de l'Analyse.

Dans ses Conférences, M. Rey Pastor a dû se limiter à quelques parties : examinons son choix et le but qu'il s'est proposé. Il a désiré donner la solution du problème général de la représentation conforme sur le cercle de rayon 1, d'une surface simplement connexe d'un nombre quelconque, fini ou non, de feuillets. Il a laissé entièrement de côté la correspondance des contours et n'a voulu faire appel qu'à un petit nombre de propositions empruntées à la théorie des fonctions de variable complexe et à celle du potentiel. Il a réussi, grâce à beaucoup d'ingéniosité, à présenter la solution sous une forme très élémentaire.

L'auteur introduit la notion de *rayon* d'un domaine pour un point déterminé O de ce domaine : c'est le rayon du cercle sur lequel on peut faire la représentation conforme du domaine, de manière que le point intérieur O ait pour homologue le centre du cercle et que la dilatation $|f'(z)|$ ait, en ce point, la valeur 1. Le théorème d'existence, pour le cas d'un domaine simplement connexe à un feuillet, est alors établi en suivant la marche de MM. Koebe et Carathéodory, par itération d'une transformation conforme $\varphi(z)$ qui remplace (D), que l'on peut toujours supposer contenu à l'intérieur d'un cercle (C) de rayon unité, par une suite de domaines qui se dilatent de plus en plus jusqu'à remplir le

cercle (C). Cette transformation $\varphi(z)$ est celle qui représente d'une manière conforme un cercle à deux feuillets sur un cercle à un seul feuillet : elle introduit malheureusement la notion de surface de Riemann dans un problème ne concernant que des aires planes ordinaires. Dans une conférence voisine, l'auteur explique la méthode alternée de Schwarz pour le cas où le contour est formé d'arcs analytiques. Enfin, par une modification heureuse des méthodes utilisées pour le cas d'une aire à un seul feuillet, il démontre le théorème général pour le cas d'une surface simplement connexe d'un nombre quelconque de feuillets.

Le principal effort de l'auteur s'est porté vers la simplicité des moyens mis en œuvre et l'utilisation du plus petit nombre possible des connaissances de ses auditeurs; il en résulte que les démonstrations, dont les détails sont d'ailleurs très clairs, sont assez morcelées; l'effet de l'ensemble se trouve un peu atténué : à trop regarder les pierres de l'édifice, on perd de vue les grandes lignes de celui-ci. Le peu de temps dont il disposait et le désir d'arriver directement au problème général ont empêché l'auteur d'indiquer la solution si intuitive de Riemann, de signaler la question, capitale pour les applications, de la correspondance des points des contours ainsi que l'importance pour la théorie des fonctions du problème général. De même, il n'a pu établir de distinction entre les progrès faits dans la théorie et ceux que l'on a obtenus dans l'exposition de cette théorie, en sorte qu'un lecteur insuffisamment averti peut confondre les travaux qui ont apporté une contribution scientifique nouvelle avec ceux qui ont poursuivi une amélioration du point de vue didactique. C'est ainsi que, dans son résumé historique, l'auteur indique comme travaux fondamentaux de la période qui commence avec Poincaré, ceux de MM. Koebe, Carathéodory et Bieberbach.

D'ailleurs, dans certains de ces mémoires, il ne s'agit pas toujours de simplifier des méthodes ni d'améliorer des démonstrations. Dans un travail récent de M. Koebe, par exemple, la préoccupation constante de l'auteur est de pourchasser l'intégrale de Cauchy et d'établir la théorie en n'écrivant que les noms de Weierstrass, de Riemann et de Schwarz. La raison en serait que la notion de série est plus simple que celle d'intégrale, comme si l'importance et la beauté d'une œuvre dépendaient de la complication des outils

utilisés pour la créer et si l'élégance d'une théorie mathématique ne résultait pas le plus souvent de l'emploi de moyens naturels et conformes à la nature de la question. On peut penser que l'intégrale de Cauchy aurait d'autres mérites qui en recommanderaient l'usage si la nationalité de son inventeur était différente et qu'il y a d'autres moyens d'honorer son pays en servant la science.

Je signalerai en terminant une solution simple et élégante du problème de Dirichlet pour le cas du cercle que l'auteur a donnée en suivant une idée de M. Bôcher. Cette solution est à rapprocher de la méthode si élémentaire que Darboux avait fait connaître, dans ce Bulletin, en 1910.

PAUL MONTEL.

MÉLANGES.

LES MÉTHODES MODERNES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX;

PAR M. BERTRAND DE FONTVIOLANT,
Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

(*Suite.*)

Extension du théorème du général Menabrea, au cas où les déformations sont à la fois élastiques et calorifiques. — Détermination des forces de liaisons surabondantes.

22. L'extension du théorème de Castigliano entraîne une extension correspondante de son corollaire, le théorème du général Menabrea; cette extension s'obtient par le remplacement, dans ce dernier théorème, du potentiel interne H par la fonction H.

Pour appliquer le théorème ainsi généralisé, à la détermination des forces et couples de liaisons d'un système hyperstatique, on introduira les forces et couples de liaisons surabondantes dans la fonction H, dont on formera les dérivées partielles par rapport à ces forces et couples. Les équations obtenues en égalant à zéro

ces dérivées, jointes aux équations fournies par la Statique pure, feront connaître toutes les forces et couples de liaisons.

On trouvera de nombreux exemples de cette détermination dans l'Ouvrage déjà cité de M. Ernest Flamard, sur le *Calcul des Systèmes élastiques de la construction*.

Principes de réciprocité.

23. Théorème. — 1° *Si une force* F_A *égale à l'unité, appliquée en un point* A *d'un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou d'un système de pareils corps, isostatique ou hyperstatique, suivant une direction arbitrairement choisie* Δ_A, *imprime à un point* B *un déplacement élastique dont la projection, sur une direction* Δ_B *également arbitraire, est* λ_B^A, *réciproquement une force* F_B *égale à l'unité, appliquée au point* B, *suivant la direction* Δ_B, *imprime au point* A *un déplacement élastique dont la projection* λ_A^B, *sur la direction* Δ_A, *est égale à* λ_B^A.

2° *Si un couple* $C_{aa'}$ *égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en deux points* a *et* a' *et dont l'axe a une direction* $\Gamma_{aa'}$ *arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à la droite* aa', *imprime à une droite* bb' *une rotation élastique dont la projection* (¹) *sur une direction* $\Gamma_{bb'}$ *arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à* bb' *est* $\varphi_{bb'}^{aa'}$, *réciproquement un couple* $C_{bb'}$ *égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en* b *et* b' *et dont la direction de l'axe est* $\Gamma_{bb'}$, *imprime à la droite* aa' *une rotation élastique dont la projection* $\varphi_{aa'}^{bb'}$ *sur la direction* $\Gamma_{aa'}$ *est égale à* $\varphi_{bb'}^{aa'}$.

3° *Si un couple* $C_{aa'}$ *égal à l'unité, dont les deux forces sont appliquées en deux points* a *et* a' *et dont l'axe a une direction* $\Gamma_{aa'}$, *arbitrairement choisie parmi les perpendiculaires à la droite* aa', *imprime à un point* B *un déplacement élastique dont la projection sur une direction arbitraire* Δ_B *est* $\lambda_B^{aa'}$, *réciproquement, une force* F_B *égale à l'unité, appliquée en* B *suivant la direction* Δ_B, *imprime à la droite* aa' *une*

(¹) Il est rappelé que par *projection d'une rotation*, il faut entendre *la projection du vecteur représentatif de cette rotation* (n° 12).

rotation élastique dont la projection $\varphi^{B}_{aa'}$ *sur la direction* $\Gamma_{aa'}$ *est égale à* $\lambda^{aa'}_{B}$ (étant entendu, au point de vue de l'homogénéité, que cette rotation n'est pas mesurée par son angle, mais par la longueur de l'arc intercepté par cet angle, sur une circonférence de rayon égal à l'unité de longueur).

Voici la démonstration de la première partie de ce théorème.

Soient respectivement :

λ^{A}_{A} et λ^{A}_{B} les projections, sur les directions Δ_A et Δ_B, des déplacements élastiques imprimés aux points A et B, par la force F_A égale à l'unité, appliquée en A, suivant la direction Δ_A;

λ^{B}_{A} et λ^{B}_{B} les projections, sur ces mêmes directions, des déplacements élastiques imprimés à ces mêmes points, par la force F_B égale à l'unité, appliquée en B, suivant la direction Δ_B.

(Dans ces notations, l'indice inférieur désigne le point qui subit le déplacement considéré; l'indice supérieur est celui de la force qui produit ce déplacement.)

Supposons que deux forces F'_A et F'_B, différentes de l'unité, soient appliquées *simultanément*, la première en A, suivant la direction Δ_A, la seconde en B, suivant la direction Δ_B; soient respectivement λ'_A et λ'_B les projections, sur ces deux directions, des déplacements élastiques qu'elles impriment aux points A et B. On a, d'après le principe de la superposition des effets élastiques des forces,

$$(a) \qquad \lambda'_A = \lambda^{A}_{A} F'_A - \lambda^{B}_{A} F'_B, \qquad \lambda'_B = \lambda^{A}_{B} F'_A - \lambda^{B}_{B} F'_B$$

et, en vertu du théorème de Castigliano (n° 14),

$$(b) \qquad \lambda'_A = \frac{\partial \Pi}{\partial F'_A}, \qquad \lambda'_B = \frac{\partial \Pi}{\partial F'_B},$$

Π désignant le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé par les forces F'_A et F'_B agissant simultanément.

Or, analytiquement, on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial F'_A \, \partial F'_B} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial F'_B \, \partial F'_A};$$

et, par suite, à cause des relations (b),

$$\frac{\partial \lambda'_A}{\partial F'_B} = \frac{\partial \lambda'_B}{\partial F'_A},$$

ou, en remplaçant ces deux dérivées partielles, par leurs valeurs déduites des formules (a),

$$\lambda_A^B = \lambda_B^A. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le même mode de démonstration s'applique aux deux autres parties du théorème.

Les trois principes de réciprocité qui viennent d'être énoncés sont souvent appelés, à l'étranger, *principes de Maxwell*, bien que ce savant n'ait établi que le premier et pour les systèmes articulés seulement [1].

Lignes d'influence.

24. Des principes de réciprocité découle une méthode générale de détermination des *lignes d'influence* dans les corps et dans les systèmes de corps à fibres moyennes, astreints à des liaisons surabondantes [2]. Ces lignes, introduites dans la Résistance des matériaux par Fränkel [3] et étudiées d'une manière remarquable par Winkler [4] et Maurice Levy [5], jouent un rôle important dans le calcul des ponts en métal ou en béton

---

(1) Clerk Maxwell, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames* (*Philosophical Magazine*, t. XXVII, 1864, p. 294).

(2) Bertrand de Fontviolant, *Sur la détermination des forces élastiques et de leurs lignes d'influence dans les poutres assujetties à des liaisons surabondantes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVIII, 1889, p. 75); *Méthode générale de détermination des lignes d'influence dans les poutres pleines ou réticulaires, assujetties à des conditions surabondantes* (*Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, novembre 1890, p. 742); *Ponts métalliques à travées continues. Méthode de calcul satisfaisant aux prescriptions du Règlement ministériel du 29 août 1891* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXV, 1892, p. 996, et *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, décembre 1892, p. 1105).

(3) Fränkel, *Théorie des lignes d'influence* (*Civil Ingénieur*, 1876).

(4) Winkler, *Application des lignes d'influence* (*Revue des Ingénieurs et Architectes de Hanovre*, 1879).

(5) Maurice Levy, *La Statique graphique et ses applications aux constructions* (1re Partie, 1886; 3e Partie, 1887).

armé; elles fournissent, en effet, le moyen de déterminer les efforts maximum produits dans les divers éléments de ces ponts, par le passage des surcharges mobiles; le cadre limité de la présente Note ne nous permet pas de nous étendre davantage sur ce sujet.

Seconde méthode fondée sur le théorème des forces vives. Équation générale de l'Élasticité.

25. L'exposé qui suit diffère sensiblement dans la forme, mais non dans le fond, de celui présenté dans notre *Mémoire sur les déformations élastiques des pièces et des systèmes de pièces à fibres moyennes planes ou gauches* (1). Il est plus général, car il concerne non seulement ces pièces, mais aussi les corps isotropes; enfin, il est plus simple et plus rapide et ne nécessite aucune intégration.

Il consiste à donner, du théorème de Betti (2), Boussinesq (3) et Maurice Levy (4), une démonstration nouvelle, très élémentaire, qui ajoute à ce théorème un complément d'où découle immédiatement une relation générale entre les déplacements élastiques et les forces extérieures qui les produisent.

En introduisant ensuite, dans cette relation, les déplacements calorifiques (ce qui n'avait pas été fait dans notre Mémoire précité), nous obtenons l'*équation générale de l'Élasticité* qui, synthétisant toute la théorie des déformations, permet de déterminer les déplacements élastiques et calorifiques d'une construction quelconque et de former, dans tous les cas et sans recherches spéciales, les équations nécessaires pour le calcul des forces de liaisons, dans les corps et les systèmes de corps hyperstatiques.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVII, 1888, p. 383, et *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, août 1888, p. 291, et mars 1889, p. 416.

(2) Betti, *Teoria del Elasticità* (1872).

(3) Boussinesq, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I, fasc. 2, 1887, p. 127 et 128.

(4) Maurice Levy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVII, 1888, p. 414.

soumis à des forces extérieures quelconques, ainsi qu'à des actions calorifiques.

Ainsi se trouve présentée une démonstration nouvelle, fondée sur le théorème des forces vives, de l'*équation générale de l'Élasticité*, établie dans notre Mémoire y relatif [1], au moyen du théorème du travail virtuel.

Théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy complété.

26. Considérons un système de corps isotropes ou à fibres moyennes, isostatique ou hyperstatique (n° 11) (le cas d'un corps unique sera regardé comme un cas particulier). Soumettons-le à l'action d'un système de m forces extérieures quelconques, que nous appellerons système (A), forces croissant lentement depuis zéro jusqu'à certaines valeurs finales; soient :

F_{A_i} la valeur finale de l'une quelconque de ces forces,
A_i son point d'application,
Δ_{A_i} sa direction,
$\lambda^A_{A_i}$ la projection, sur la direction Δ_{A_i}, du déplacement élastique du point A_i.

On a, en vertu de l'équation fondamentale (13) (n° 12),

$$(a) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda^A_{A_i} = \Pi_{F_A},$$

en désignant par Π_{F_A} le potentiel interne du système de corps déformé.

Remplaçons le système de forces (A) par un second système (B), composé de n forces extérieures quelconques, croissant comme les premières; soient :

F_{B_i} la valeur finale de l'une quelconque de ces forces,
B_i son point d'application.

---

[1] *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, octobre 1907, p. 365. — *Voir* aussi Lecornu, *Cours de Mécanique professé à l'École Polytechnique*, t. III, 1918, p. 45, 63, 76.

Δ_{B_i} sa direction,

$\lambda^A_{B_i}$ la projection, sur la direction Δ_{B_i}, du déplacement élastique du point B_i.

On a, comme précédemment,

$$(b) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i}\lambda^B_{B_i} = \Pi_{F_B},$$

en désignant par Π_{F_B} le potentiel interne du système de corps déformé.

Soient maintenant :

$\lambda^B_{A_i}$ la projection, sur la direction Δ_{A_i}, du déplacement élastique du point A_i, sous l'action du système de forces (B),

$\lambda^A_{B_i}$ la projection, sur la direction Δ_{B_i}, du déplacement élastique du point B_i, sous l'action du système de force (A).

Considérons la déformation du système de corps, non plus sous l'action d'un seul des deux systèmes (A) et (B), mais sous l'action simultanée de ces deux systèmes : en vertu du principe de superposition, le déplacement élastique du point A_i, en projection sur la direction Δ_{A_i} est $\lambda^A_{A_i} + \lambda^B_{A_i}$ et celui du point B_i, en projection sur la direction Δ_{B_i}, est $\lambda^A_{B_i} + \lambda^B_{B_i}$. Cette déformation peut être réalisée de deux manières différentes, comme suit :

1° Appliquons d'abord le système de forces (A), ces forces croissant depuis zéro jusqu'à leurs valeurs finales, puis le système de forces (B), ces dernières forces croissant de la même manière que les premières; la déformation s'effectue ainsi en deux temps.

Pendant le premier temps, les points d'application A_i des forces du système (A) prennent les déplacements $\lambda^A_{A_i}$, en projection sur les directions Δ_{A_i}, et le travail de ces forces, qui croissent de zéro à F_{A_i}, est (n° 12)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda^A_{A_i},$$

tandis que les points B_i prennent les déplacements $\lambda^A_{B_i}$, en projection sur les directions Δ_{B_i}.

Pendant le second temps, les points A_i prennent les déplacements $\lambda^B_{A_i}$, en projection sur les directions Δ_{A_i} des forces F_i, et le travail de ces forces, qui demeurent constantes, est

$$\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i} \lambda^B_A,$$

tandis que les points d'application B_i des forces du système (B) prennent les déplacements $\lambda^B_{B_i}$, en projection sur les directions Δ_{B_i} et que le travail de ces forces, qui croissent de zéro à F_{B_i}, est

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i} \lambda^B_{B_i}.$$

Le travail total des deux systèmes de forces (A) et (B) est la somme des trois travaux partiels ci-dessus, et, d'après l'équation fondamentale (13) (n° 12), il est égal au potentiel interne du système de corps déformé sous l'action simultanée de ces deux systèmes de forces. On a donc, en désignant par $H_{F_A F_B}$ ce potentiel,

$$(c) \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i} \lambda^A_{A_i} + \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i} \lambda^B_{A_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i} \lambda^B_{B_i} = H_{F_A F_B}.$$

2° Inversement, appliquons d'abord le système de forces (B), puis le système de forces (A), ce qui, de la même manière que précédemment, conduit à l'équation

$$(d) \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i} \lambda^B_{B_i} + \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i} \lambda^A_{B_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i} \lambda^A_{A_i} = H_{F_A F_B},$$

laquelle ne diffère de l'équation (c) que par la permutation des deux systèmes de forces (A) et (B) et des déplacements élastiques correspondants.

En retranchant les équations (a) et (b) de l'équation (c), et, ensuite, de l'équation (d), on obtient les deux nouvelles équations

$$(e) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i} \lambda^B_{A_i} = H_{F_A F_B} - (H_{F_A} + H_{F_B}),$$

$$(f) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i} \lambda^A_B = H_{F_A F_B} - (H_{F_A} + H_{F_B}),$$

qui se traduisent comme suit :

THÉORÈME. — *Si, à un corps isotrope ou à fibre moyenne, ou à un système de pareils corps, isostatique ou hyperstatique, on applique successivement deux systèmes de forces* (A) *et* (B) :

1° *La somme des travaux des forces du système* (A), *pour les déplacements élastiques dus au système* (B), *est égale à la somme des travaux des forces du système* (B), *pour les déplacements élastiques dus au système* (A);

2° *Ces deux sommes de travaux sont égales à la différence entre le potentiel interne du corps, ou du système de corps, déformé par les deux systèmes de force* (A) *et* (B) *appliqués simultanément et la somme des potentiels internes du corps, ou du système de corps, déformé par chacun de ces deux systèmes de forces appliqué à l'exclusion de l'autre.*

La première partie de cette proposition est le théorème de Betti. Boussinesq et Maurice Levy; la seconde est le complément annoncé plus haut (n° 25).

Remarque. — Parmi les forces des deux systèmes (A) et (B) ou de l'un de ces deux systèmes seulement, il peut y en avoir qui forment des couples. Ainsi, supposons que le système (A) se compose de p forces ne formant pas de couples et de $2q$ forces formant q couples; soient :

a_i et a'_i les points d'application de deux forces formant un couple.
$C_{a_i a'_i}$ la valeur de ce couple,
$\varphi^{B}_{a_i a'_i}$ la projection, sur l'axe du couple $C_{a_i a'_i}$, de la rotation élastique imprimée à la droite $a_i a'_i$, par le système de force (B);

le travail de ce couple, pour ce déplacement de rotation, est $C_{a_i a'_i}\varphi^{B}_{a_i a'_i}$ et, par suite, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i}\lambda^{B}_{A_i} = \sum_{i=1}^{i=p} F_{A_i}\lambda^{B}_{A_i} + \sum_{i=1}^{i=q} C_{a_i a'_i}\,\varphi^{B}_{a_i a'_i},$$

ce qui permet d'écrire l'équation (e) sous la nouvelle forme

$$(29)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} F_{A_i}\lambda^{B}_{A_i} + \sum_{i=1}^{i=q} C_{a_i a'_i}\,\varphi^{B}_{a_i a'_i} = \Pi_{F_A, F_B} - (\Pi_{F_A} + \Pi_{F_B}),$$

si l'on veut y mettre en évidence les rotations projetées $\varphi^{B}_{a_i a'_i}$.

Principes de réciprocité.

27. Les trois principes de réciprocité établis précédemment (n° 23) sont des cas particuliers du théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy. Le premier correspond au cas où les systèmes (A) et (B) se composent chacun d'une force unique égale à l'unité; le second, au cas où ils se composent chacun d'un couple égal à l'unité; le troisième, au cas où le système (A) se compose d'un couple égal à l'unité et le système (B), d'une force égale à l'unité.

Relation générale entre les déplacements élastiques et les forces extérieures qui les produisent.

28. Soit un système de corps isotropes ou à fibres moyennes; supposons-le hyperstatique extérieurement et intérieurement (n° 11) (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier; celui d'un corps unique, également). Ce système de corps est déformé par des forces extérieures F directement appliquées.

Appelons :

1° $$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

les projections des déplacements élastiques d'un certain nombre de points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots$$

du système de corps, sur des directions arbitrairement choisies

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2° $$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots$$

les projections des rotations élastiques d'un certain nombre de droites

$$a_1a'_1, \quad a_2a'_2, \quad a_3a'_3, \quad \ldots$$

contenues dans le système de corps, sur des directions

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots$$

arbitrairement choisies parmi les directions normales à ces droites.

Considérons maintenant le système isostatique obtenu par la

suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné [1].

Appelons F_{es} les forces de liaisons extérieures surabondantes et F_{is} les forces de liaisons intérieures surabondantes du système hyperstatique; parmi ces forces il peut y en avoir qui forment des couples; peu importe; il est, d'ailleurs, inutile ici de mettre ces couples en évidence.

Si l'on soumet le système isostatique précité aux forces F, F_{es} et F_{is}, il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique soumis aux seules forces F; en particulier, dans ce système isostatique, les déplacements élastiques des points A_1, A_2, A_3, ... et les rotations élastiques des droites $a_1a'_1$, $a_2a'_2$, $a_3a'_3$, ... sont les mêmes que dans le système hyperstatique.

Supprimons les forces F, F_{es}, F_{is}, et, au système isostatique qui n'est plus alors soumis à aucune force, appliquons :

1° Aux points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

des forces, de grandeurs quelconques, dite *forces auxiliaires*,

$$\mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_3, \quad \ldots$$

suivant les directions

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2° Aux points

$$a_1, a'_1, \quad a_2, a'_2, \quad a_3, a'_3, \quad \ldots,$$

des forces formant des couples, de grandeurs quelconques, dits *couples auxiliaires*,

$$\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{C}_2, \quad \mathfrak{C}_3, \quad \ldots$$

d'axes dirigés suivant

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots.$$

Cela posé, appliquons l'équation (29) (n° 26, théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy complété) au système isostatique, en considérant, dans cette équation, le système de forces (A) comme constitué par les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, ...

---

[1] Il a été indiqué précédemment (n° 11) que, suivant le nombre et la nature de ses liaisons, un système hyperstatique peut être rendu isostatique, d'une seule manière ou de plusieurs. Nous considérons ici l'un quelconque des systèmes isostatiques ainsi obtenus.

$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots$, et le système de forces (B) comme constitué par les forces F, F_{es} et F_{is}; il vient

$$\mathfrak{F}_1\lambda_1 + \mathfrak{F}_2\lambda_2 + \mathfrak{F}_3\lambda_3 + \ldots - \mathfrak{S}_1\varphi_1 + \mathfrak{S}_2\varphi_2 + \mathfrak{S}_3\varphi_3 + \ldots$$
$$= \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}} - (\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}),$$

en désignant par $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}}$, $\overline{\Pi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}$, $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}}$ le potentiel interne total du système isostatique déformé respectivement par : 1° les forces données F et les forces de liaisons surabondantes F_{es} et F_{is} du système hyperstatique; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$; 3° l'ensemble de ces forces et couples (la barre surmontant la lettre Π est destinée à indiquer que ces potentiels sont relatifs au système isostatique).

Nous écrirons, pour abréger,

$$(30) \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}} - (\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}).$$

Équation générale de l'Élasticité.

29. Supposons que le système de corps, hyperstatique, considéré précédemment (n° 28), soit soumis non seulement à des forces extérieures F directement appliquées, mais encore à une variation de température τ, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées ses liaisons, positivement au-dessus, négativement au-dessous. La déformation de ce système est donc à la fois élastique et calorifique.

Considérons, dans le système, un certain nombre de points et de droites et soient :

1° Pour l'un quelconque A de ces points, λ la projection de son déplacement élastique et calorifique, sur une direction Δ arbitrairement choisie;

2° Pour l'une quelconque aa' de ces droites, φ la projection de sa rotation élastique et calorifique, sur une direction Γ choisie arbitrairement parmi les normales à aa'.

Envisageons le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné. Soumettons-le aux forces extérieures F, aux forces de liaisons sura-

bondantes F_{es} et F_{is} (n° 28) du système hyperstatique, et à la variation de température τ; il prend un état de déformation élastique et calorifique identique à celui du système hyperstatique soumis seulement aux forces F et à la variation de température τ; en particulier, les valeurs de λ et de φ sont les mêmes dans le système hyperstatique et dans le système isostatique.

Appelons λ' et φ' les valeurs que prendraient λ et φ, si le système isostatique était soumis exclusivement aux forces F, F_{es} et F_{is}, c'est-à-dire si la déformation était purement élastique; λ_τ et φ_τ les valeurs que prendraient ces mêmes quantités, si ce système était soumis exclusivement à la variation de température, c'est-à-dire si sa déformation était purement calorifique.

On a, en vertu du principe de la superposition des effets élastiques et calorifiques,

$$(a) \qquad \lambda = \lambda' + \lambda_\tau, \qquad \varphi = \varphi' + \varphi_\tau.$$

Ceci posé, examinons séparément la déformation élastique et la déformation calorifique précitées.

En ce qui concerne la première, on a immédiatement, d'après la relation (30) (n° 28),

$$(b) \qquad \sum \mathcal{F}\lambda' + \sum \mathfrak{S}\varphi' = \Pi_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathfrak{S}} - (\Pi_{F, F_{es}, F_{is}} + \Pi_{\mathcal{F}, \mathfrak{S}}),$$

$\mathcal{F}$ et $\mathfrak{S}$ désignant respectivement des forces auxiliaires appliquées aux points A, suivant les directions Δ, et des couples auxiliaires dont les deux forces sont appliquées aux extrémités des droites aa' et dont les axes ont les directions Γ.

Pour étudier la seconde déformation, imaginons que, suppression faite des forces F, F_{es} et F_{is}, on applique au système isostatique les mêmes forces et couples auxiliaires que ci-dessus; le système prend un certain état de déformation et, sur trois éléments normaux aux axes de coordonnées, pris en un point quelconque (x, y, z) du système, il naît des fatigues normales n'_x, n'_y et n'_z (et des fatigues tangentielles qui n'auront pas à intervenir ici). Soumettons alors le système à la variation de température τ : il subit une seconde déformation qui est purement calorifique. Pendant cette seconde déformation, les forces et couples auxiliaires

accomplissent un travail égal à

$$\sum \mathcal{F} \lambda_\tau + \sum \mathcal{C} \varphi_\tau;$$

et les forces élastiques, qui demeurent constantes (puisque le système étant isostatique est librement dilatable) accomplissent un travail égal à

$$\begin{aligned} & n'_x dy\, dz (-\alpha\tau dx) + n'_y dz\, dx (-\alpha\tau dy) + n_z dx\, dy (-\alpha\tau dz) \\ & = -\alpha\tau (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz, \end{aligned}$$

pour un parallélépipède élémentaire découpé au point (x, y, z); et égal à

$$-\alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz,$$

pour le système entier, l'intégrale triple étant étendue au volume total occupé par le système de corps.

En vertu du théorème des forces vives, ces deux travaux sont égaux; donc

$$(c) \qquad \sum \mathcal{F} \lambda_\tau + \sum \mathcal{C} \varphi_\tau = -\alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz.$$

En ajoutant membre à membre les deux équations (b) et (c) et en ayant égard aux relations (a), on a finalement

$$(31) \qquad \begin{aligned} \sum \mathcal{F} \lambda + \sum \mathcal{C} \varphi = {} & \Pi_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathcal{C}} - (\Pi_{F, F_{es}, F_{is}} + \Pi_{\mathcal{F}, \mathcal{C}}) \\ & - \alpha\tau \int\int\int (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Telle est l'*Équation générale de l'élasticité des systèmes de corps isotropes*.

Si, en Théorie mathématique de l'Élasticité, on savait former les expressions des fatigues normales et tangentielles et, par suite, d'après les formules (3) et (5) (n° 4) celle du potentiel interne, en fonction des forces extérieures produisant ces fatigues, la susdite équation permettrait de résoudre tous les problèmes relatifs aux déformations élastiques et calorifiques des constructions, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux hypothèses de la Résistance des matériaux. Un progrès important serait donc accompli si l'on

parvenait à vaincre les difficultés que présente l'intégration des équations aux dérivées partielles de la Théorie mathématique de l'Élasticité.

30. En reprenant la démonstration qui précède, dans le cas d'un système de corps à fibres moyennes, on trouve

$$(32)\qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right) - \alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds,$$

en désignant par $\mathfrak{N}$ l'effort normal produit, en une section quelconque de l'un quelconque des corps du système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné, sous l'action des forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

On peut d'ailleurs passer directement de l'équation (31) à l'équation (32), par application de la relation (17) (n° 13) qui donne ici

$$\iiint (n'_x + n'_y + n'_z)\, dx\, dy\, dz = \int \mathfrak{N}\, ds.$$

Le second membre de l'équation (32) se transforme comme suit :

D'après la formule (11) (n° 9), on peut écrire :

$$(a)\qquad \overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right) = \int \left[\overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} - \left(\overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right)\right] ds.$$

en désignant respectivement par $\overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is}}$, $\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$, $\overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de longueur de la fibre moyenne, de l'un quelconque des corps du système *isostatique* défini précédemment, déformé par : 1° les forces directement appliquées F et les forces de liaisons surabondantes F_{es} et F_{is} du système hyperstatique donné; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; 3° l'ensemble de ces forces et couples. Appelons :

$$1^\circ \qquad N,\quad T_\eta,\quad T_\zeta,\quad M_\xi,\quad M_\eta,\quad M_\zeta$$

les éléments de la réduction (au centre de gravité d'une section quelconque, de l'un quelconque des corps) des forces élastiques

développées dans cette section, par l'application au système *isostatique*, des forces F, F_{es} et F_{is} (ces éléments sont identiquement les mêmes que dans le système hyperstatique soumis seulement aux forces F);

2° $$\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{T}_\eta, \quad \mathfrak{T}_\zeta, \quad \mathfrak{M}_\xi, \quad \mathfrak{M}_\eta, \quad \mathfrak{M}_\zeta$$

les éléments de réduction analogues, le système isostatique étant supposé soumis aux forces et couples $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$.

En vertu du principe de superposition, si ce système est soumis à l'action simultanée des forces et couples F, F_{es}, F_{is}, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$, les éléments de réduction deviennent

$$N + \mathfrak{N}, \quad T_\eta + \mathfrak{T}_\eta, \quad T_\zeta + \mathfrak{T}_\zeta, \quad M_\xi + \mathfrak{M}_\xi, \quad M_\eta + \mathfrak{M}_\eta, \quad M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta.$$

Cela posé, d'après la formule (9) (n° 9), on a

$$\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{T_\eta^2}{G\Omega} + \ldots + \frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}\right).$$

Or, cette expression de $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$ est une fonction homogène et du second degré des six quantités N, T_η, ..., M_ζ; et, pour obtenir les expressions de $\overline{\varpi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}$ et de $\overline{\varpi}_{F, F_{is}, F_{es}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}}$, il suffit d'y remplacer respectivement ces six quantités, d'abord par $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$, puis par $N + \mathfrak{N}$, $T_\eta + \mathfrak{T}_\eta$, ..., $M_\zeta + \mathfrak{M}_\zeta$. On a donc, d'après une propriété des fonctions homogènes et du second degré [1],

$$\begin{aligned}\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}} &- (\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}) \\ &= \mathfrak{N}\frac{\partial\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}}{\partial N} + \mathfrak{T}_\eta\frac{\partial\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}}{\partial T_\eta} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta\frac{\partial\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}}{\partial M_\zeta};\end{aligned}$$

ou, en remplaçant les dérivées partielles par leurs valeurs déduites

---

[1] Voici l'énoncé de cette propriété établie par Euler. Soient :

$f(x, y, \ldots)$ une fonction, homogène et du second degré, d'un nombre quelconque de variables $x, y, \ldots$;

$x', y', \ldots$ un système de valeurs quelconques attribuées à ces variables.

On a identiquement

$$\begin{aligned}f[(x+x'), (y+y', \ldots)] &- [f(x, y, \ldots) + f(x', y', \ldots)] \\ &= x'\frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial x} + y'\frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial y} + \ldots + x\frac{\partial f(x', y', \ldots)}{\partial x'} + y\frac{\partial f(x', y', \ldots)}{\partial y'} + \ldots\end{aligned}$$

de l'expression de $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$,

$$\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}} - \left(\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}\right)$$
$$= \mathfrak{N} \frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}.$$

Par suite, en substituant dans la formule (a), on a

$$(b) \qquad \overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}, \mathfrak{S}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{F}, \mathfrak{S}}\right)$$
$$= \int \left[\mathfrak{N} \frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}\right] ds.$$

Et, dès lors, l'équation (32) devient

$$(33) \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \mathfrak{T}_\zeta \frac{T_\zeta}{G\Omega}\right.$$
$$\left. + \mathfrak{M}_\xi \frac{M_\xi}{GI_\xi} + \mathfrak{M}_\eta \frac{M_\eta}{EI_\eta} + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI_\zeta}\right] ds.$$

Dans les applications il importe de ne pas perdre de vue que :

1° Les déplacements projetés λ et φ, ainsi que les éléments N, T_η, ..., M_ζ de la réduction au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces élastiques agissant dans cette section (ou, ce qui revient au même, des forces extérieures appliquées à gauche de cette section), sont relatifs au système *hyperstatique* donné, soumis aux forces données F;

2° Les éléments de réduction similaires $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ sont relatifs au système *isostatique* obtenu par la suppression des liaisons surabondantes extérieures et intérieures du système hyperstatique donné, système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$; ces derniers éléments, étant statiquement déterminés, se calculent très aisément.

Il va de soi que l'équation (33) reste valable dans le cas où le système donné est isostatique; toutes les quantités qui y entrent sont alors relatives à ce système isostatique.

31. *Rotation élastique et calorifique d'une section quelconque.* — Il est utile, au point de vue des applications, de faire

intervenir dans l'équation (33) (n° 30) la projection, sur une direction Γ arbitrairement choisie, de la rotation élastique et calorifique d'une section transversale quelconque (S) de l'un quelconque des corps; voici comment :

Dans la section considérée (S), menons une droite aa' de direction normale à Γ [ce qui est toujours possible; il suffit, pour cela, que aa' soit dirigée suivant l'intersection de la section (S), avec un plan normal à Γ]; appliquons, en a et en a', deux forces formant un couple auxiliaire $\mathfrak{C}$, d'axe dirigé suivant Γ; à ce couple $\mathfrak{C}$ correspondra, dans l'équation (33), un terme $\mathfrak{C}\varphi$, où φ désignera la projection sur la direction Γ de la rotation de la droite aa'. Or, par les considérations cinématiques déjà utilisées (n° 15) pour la démonstration du corollaire III du théorème de Castigliano, on établit aisément que cette projection est égale à celle de la rotation de la section (S), sur la direction Γ. On peut donc dire que, dans chacun des termes $\mathfrak{C}\varphi$ de l'équation (33), φ représente la projection, sur une direction arbitrairement choisie Γ, de la rotation d'une section quelconque (S), à condition que le couple auxiliaire $\mathfrak{C}$ soit appliqué sur cette section et que son axe ait la direction Γ.

32. *Cas de la flexion plane.* — Si le corps, ou le système de corps, considéré, isostatique ou hyperstatique, est soumis à la flexion plane, en toute section, les éléments de la réduction des forces élastiques sont exclusivement un effort normal N, un effort tranchant T situé dans le plan de la ou des fibres moyennes (plan de flexion) et un couple de flexion M, d'axe normal à ce plan. Par suite, l'équation (33) (n° 30) se réduit à

$$(33') \quad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{C}\varphi = \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI} \right] ds.$$

Dans l'utilisation de cette dernière formule, on appliquera :

1° Les forces auxiliaires $\mathfrak{F}$, en des points situés dans le plan de flexion et suivant des directions Δ menées dans ce plan;

2° Les couples auxiliaires $\mathfrak{C}$, sur des sections transversales, en dirigeant leurs axes normalement à ce même plan.

Il s'ensuivra que les quantités λ seront les projections des

déplacements des points considérés, sur les directions Δ, et que les quantités φ seront les rotations mêmes des sections considérées.

Expressions générales des déplacements élastiques et calorifiques, dans les corps et les systèmes de corps à fibres moyennes.

33. Proposons-nous de former l'expression générale :

1° De la projection λ du déplacement élastique et calorifique d'un point quelconque A, sur une direction arbitrairement choisie Δ;

2° De la projection φ de la rotation élastique et calorifique d'une section quelconque (S), sur une direction arbitrairement choisie Γ.

Ces deux expressions découlent immédiatement de l'équation générale de l'élasticité, prise sous la forme (33) (n° 30).

Pour obtenir la première, il suffit de ne faire intervenir, dans cette équation, qu'une seule force auxiliaire $\mathfrak{F}$, de grandeur quelconque, appliquée en A, suivant la direction Δ; on obtient ainsi

$$(34)\qquad \lambda = \int \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{F}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathfrak{T}_\eta}{\mathfrak{F}} \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{F}} \frac{M}{EI_\zeta} \right] ds.$$

Pour obtenir la seconde, il suffit de ne faire intervenir, dans cette même équation, qu'un seul couple auxiliaire $\mathfrak{C}$, de grandeur quelconque, d'axe dirigé suivant Γ; ce qui donne

$$(35)\qquad \varphi = \int \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{C}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathfrak{T}_\eta}{\mathfrak{C}} \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{C}} \frac{M}{EI_\zeta} \right] ds.$$

On ne perdra pas de vue que, si le système considéré est hyperstatique, les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ doivent être calculés dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique (n° 30, *in fine*).

Cas d'un système soumis à la flexion plane. — Dans ce cas,

les formules précédentes se réduisent à

$$(34') \qquad \lambda = \int \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{F}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{F}} \frac{T}{G\Omega} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}} \frac{M}{EI} \right] ds,$$

$$(35') \qquad \varphi = \int \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{C}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{C}} \frac{T}{G\Omega} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{C}} \frac{M}{EI} \right] ds.$$

Rappelons que, dans ce dernier cas, l'axe du couple auxiliaire $\mathfrak{C}$, appliqué à la section considérée (S), doit être dirigé normalement au plan de flexion et que φ est la rotation même de cette section.

Formules de M. Ernest Flamard.

34. Si dans l'équation générale de l'élasticité (32) (n° 32), relative aux systèmes de corps à fibres moyennes, on fait intervenir exclusivement d'abord une seule force auxiliaire $\mathfrak{F}$, puis un seul couple auxiliaire $\mathfrak{C}$, on obtient les deux formules

$$(a) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\mathfrak{F}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{F}} \right) - \alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds \right], \\ \varphi = \dfrac{1}{\mathfrak{C}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{C}} \right) - \alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds \right], \end{cases}$$

qui se réduisent, si le système de corps n'est soumis à aucune variation de température, à

$$(b) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\mathfrak{F}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{F}} \right) \right], \\ \varphi = \dfrac{1}{\mathfrak{C}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{C}} \right) \right]. \end{cases}$$

Ainsi qu'on le vérifie aisément si, au contraire, le système est soumis à une variation de température, on peut écrire les deux formules (a) sous la forme

$$(c) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{\mathfrak{F}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{F}} \right) \right], \\ \varphi = \dfrac{1}{\mathfrak{C}} \left[\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathfrak{C}} \right) \right], \end{cases}$$

en y introduisant la fonction Π exprimée par la formule (25)

(n° 19), et en convenant : que $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}}$ représente la valeur de la fonction H afférente au système isostatique soumis aux forces F, F_{es}, F_{is} et à la variation τ de température; que $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{F}}$ et $\overline{\Pi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathfrak{S}}$ représentent respectivement les valeurs que prend cette même fonction lorsque le système isostatique est soumis, en outre, à la force auxiliaire $\mathfrak{F}$ ou au couple auxiliaire $\mathfrak{S}$.

Les formules (*b*) et (*c*) ont été établies, autrement d'ailleurs qu'il vient d'être indiqué, par M. Ernest Flamard, dans sa Thèse de doctorat déjà citée. Elles restent valables dans le cas des systèmes isotropes.

Accord entre les résultats des deux méthodes fondées sur le théorème des forces vives.

35. Comparons les expressions générales (27) (n° 21) et (34) (n° 33) de la projection du déplacement élastique et calorifique d'un point quelconque A, sur une direction arbitrairement choisie Δ,

$$\lambda = \int \left[\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) \frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} + \frac{T_\eta}{G\Omega} \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{F}} + \ldots + \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{F}} \right] ds,$$

$$\lambda = \int \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{F}} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau \right) + \frac{\mathfrak{T}_\eta}{\mathfrak{F}} \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{F}} \frac{M_\zeta}{EI_\zeta} \right] ds,$$

expressions obtenues respectivement par la première et par la seconde méthode fondées sur le théorème des forces vives.

Dans ces deux formules, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ sont les éléments de la réduction, au centre de gravité d'une section quelconque de l'un quelconque des corps, des forces élastiques développées dans cette section, par l'application de la force auxiliaire $\mathfrak{F}$ au point A, suivant la direction Δ; et, si le système est hyperstatique, ces éléments doivent, qu'on utilise l'une ou l'autre des deux formules, être calculés dans le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique. Or, en vertu du principe de la superposition des effets des forces, les forces élastiques dans une section quelconque et, par suite, les éléments $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ de leur réduction, sont proportionnels

à la force extérieure $\mathfrak{F}$ qui les produit; on peut donc écrire :

$$\mathfrak{N} = a\mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{T}_\eta = b\mathfrak{F}, \qquad \ldots \qquad \mathfrak{M}_\zeta = f\mathfrak{F},$$

$a, b, \ldots, f$ désignant six constantes indépendantes de $\mathfrak{F}$; d'où

$$\frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} = a, \qquad \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{F}} = b, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{F}} = f;$$

et, par suite,

$$\frac{d\mathfrak{N}}{d\mathfrak{F}} = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{F}}, \qquad \frac{d\mathfrak{T}_\eta}{d\mathfrak{F}} = \frac{\mathfrak{T}_\eta}{\mathfrak{F}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\mathfrak{M}_\zeta}{d\mathfrak{F}} = \frac{\mathfrak{M}_\zeta}{\mathfrak{F}};$$

ce qui prouve l'accord entre les deux expressions (27) et (34) du déplacement projeté λ. L'accord entre les deux expressions (28) (n° 21) et (35) (n° 33) de la rotation projetée φ, se démontre de la même manière.

Détermination des forces de liaisons surabondantes, dans les systèmes de corps à fibres moyennes. — Équation aux liaisons surabondantes.

36. La méthode de calcul des forces de liaisons surabondantes découle de l'équation générale de l'Élasticité. Pour en simplifier l'exposé, nous supposerons que le système hyperstatique considéré, déformé par des forces directement appliquées F et par une variation de température τ, est soumis à la flexion plane; dans ce cas (n° 32) l'équation générale de l'Élasticité se réduit à

$$(36') \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{C}\varphi = \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI} \right] ds.$$

Comme forces et couples auxiliaires à appliquer au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique considéré, adoptons :

1° Des forces $\mathfrak{F}$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes *extérieures* du système hyperstatique;

2° Des couples $\mathfrak{C}$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes *exté-*

rieures du système hyperstatique et ayant, comme ceux-ci, leurs axes normaux au plan de flexion;

3° Des forces $\mathfrak{F}'$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes points d'application et mêmes directions que les forces de liaisons surabondantes *intérieures* du système hyperstatique et, comme celles-ci, deux à deux égales et opposées;

4° Des couples $\mathfrak{C}'$, de grandeurs arbitraires, ayant mêmes sections d'application que les couples de liaisons surabondantes *intérieures* du système hyperstatique, ayant, comme ceux-ci, leurs axes normaux au plan de flexion et étant, comme ceux-ci, deux à deux égaux et de sens contraire.

Dès lors, l'équation (33′) s'écrit

$$(a) \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{C}\varphi + \sum \mathfrak{F}'\lambda + \Sigma \mathfrak{C}'\varphi$$
$$= \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI} \right] ds.$$

Il est facile de voir que son premier membre est nul.

En effet, les projections λ des déplacements élastiques des points d'application des forces auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sur les directions de ces forces, ainsi que les rotations φ des sections d'application des couples auxiliaires $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, sont afférentes au système hyperstatique, déformé par les forces F et par la variation de température τ; or :

1° Sur les directions des forces $\mathfrak{F}$, qui, par hypothèse, sont celles des forces de liaisons surabondantes extérieures, les projections λ sont nulles, en raison de ces liaisons mêmes, et, par suite, la somme $\Sigma\mathfrak{F}\lambda$ est également nulle;

2° Les rotations φ des sections d'application des couples de liaisons surabondantes extérieures sont nulles en raison de ces liaisons mêmes, et, par suite, la somme $\Sigma\mathfrak{C}\varphi$ est également nulle;

3° Par hypothèse, les forces auxiliaires $\mathfrak{F}'$ sont deux à deux égales et opposées, de sorte qu'à toute force $+\mathfrak{F}'$ correspond une force $-\mathfrak{F}'$; or, ces deux forces $+\mathfrak{F}'$ et $-\mathfrak{F}'$ sont appliquées en deux points qui, dans le système hyperstatique, sont astreints à rester en contact, et dont, par conséquent, le déplacement projeté λ est

le même; donc, dans la somme $\Sigma \mathcal{F}'\lambda$, à chaque terme $+\mathcal{F}'\lambda$ correspond un terme $-\mathcal{F}'\lambda$, et, par suite, cette somme est nulle;

4° La somme $\Sigma \mathcal{C}\varphi$ est nulle pour la même raison.

L'équation (a) se réduit donc à

$$(36) \qquad \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI} \right] ds = 0.$$

C'est l'*équation aux liaisons surabondantes*, dans laquelle les éléments de réduction N, T, M sont afférents au système hyperstatique considéré, soumis aux forces F et à la variation de température τ; et ceux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$, au système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{C}'$ définis ci-dessus. Cette équation s'utilise de la manière suivante :

Supposons, sans faire de distinction entre les liaisons surabondantes extérieures et celles intérieures, qu'il y ait m forces et n couples de liaisons surabondantes, ce qui entraîne l'application de m forces auxiliaires $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ et n couples auxiliaires $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$, au système isostatique. Les éléments de réduction correspondants $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$, en une section quelconque, sont des fonctions linéaires et homogènes de ces forces et couples; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= \mathcal{F}_1\alpha_1 + \ldots + \mathcal{F}_m\alpha_m + \mathcal{C}_1\beta_1 + \ldots + \mathcal{C}_n\beta_n,\\
\mathfrak{T} &= \mathcal{F}_1\gamma_1 + \ldots + \mathcal{F}_m\gamma_m + \mathcal{C}_1\delta_1 + \ldots + \mathcal{C}_n\delta_n,\\
\mathfrak{M} &= \mathcal{F}_1\varepsilon_1 + \ldots + \mathcal{F}_m\varepsilon_m + \mathcal{C}_1\theta_1 + \ldots + \mathcal{C}_n\theta_n,
\end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta$ désignant des fonctions des coordonnées x et y du centre de gravité de la section considérée.

Substituons ces expressions dans l'équation (36) et groupons respectivement les termes en $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$; il vient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 \int \left[\alpha_1 \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \gamma_1 \frac{T}{G\Omega} + \varepsilon_1 \frac{M}{EI} \right] ds\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \mathcal{F}_m \int \left[\alpha_m \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \gamma_m \frac{T}{G\Omega} + \varepsilon_m \frac{M}{EI} \right] ds\\
&+ \mathcal{C}_1 \int \left[\beta_1 \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \delta_1 \frac{T}{G\Omega} + \theta_1 \frac{M}{EI} \right] ds\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \mathcal{C}_n \int \left[\beta_n \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \delta_n \frac{T}{G\Omega} + \theta_n \frac{M}{EI} \right] ds = 0
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ étant de grandeur arbitraire, pour que cette équation soit satisfaite, il faut qu'on ait séparément

$$\int\left[\alpha_1\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)+\gamma_1\frac{T}{G\Omega}+\varepsilon_1\frac{M}{EI}\right]ds=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int\left[\alpha_m\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)+\gamma_m\frac{T}{G\Omega}+\varepsilon_m\frac{M}{EI}\right]ds=0,$$

$$\int\left[\beta_1\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)+\delta_1\frac{T}{G\Omega}+\theta_1\frac{M}{EI}\right]ds=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int\left[\beta_n\left(\frac{N}{E\Omega}-\alpha\tau\right)+\delta_n\frac{T}{G\Omega}+\theta_n\frac{M}{EI}\right]ds=0.$$

Ces $m+n$ équations, si l'on y remplace N, T, M, en fonction des $m+n$ forces et couples de liaisons surabondantes inconnus, fournissent les valeurs de ces forces et couples.

Méthode fondée sur le théorème du travail virtuel.

37. Le théorème du travail virtuel a été utilisé, pour la première fois, en Résistance des matériaux, par Mohr ([1]), pour la détermination des efforts dans les systèmes articulés à barres surabondantes.

Depuis, les applications de ce théorème aux autres systèmes employés en construction ont été largement développées par divers auteurs, notamment par Muller-Breslau ([2]).

Enfin, ce même théorème nous a permis d'établir l'*équation générale de l'élasticité* ([3]) dont nous venons de donner plus haut (n°s 29 et 30) une démonstration nouvelle déduite du théorème des forces vives.

([1]) *Zeitschrift der Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1874, p. 223.

([2]) *Die Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstructionen*, 1886.

([3]) *L'équation générale de l'élasticité des constructions et ses applications* (*Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, octobre 1907, p. 365).

Équation générale de l'Élasticité.

38. Soit un système de corps isotropes; supposons-le hyperstatique extérieurement et intérieurement (n° 11) (le cas d'un système isostatique sera regardé comme un cas particulier; celui d'un corps unique, également). Ce système de corps est déformé sous l'action de forces extérieures F, directement appliquées, et d'une variation de température de τ degrés, comptée à partir de la température à laquelle ont été réalisées les diverses liaisons du système.

Appelons :

1° $$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

les projections des déplacements élastiques et calorifiques d'un certain nombre de points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

du système de corps, sur des directions arbitrairement choisies

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2° $$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots$$

les projections des rotations élastiques et calorifiques d'un certain nombre de droites

$$a_1 a'_1, \quad a_2 a'_2, \quad a_3 a'_3, \quad \ldots,$$

contenues dans le système de corps, sur des directions

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots,$$

arbitrairement choisies parmi les directions normales à ces droites;

3° $$\varepsilon_x - \alpha\tau, \quad \varepsilon_y - \alpha\tau, \quad \varepsilon_z - \alpha\tau, \quad \gamma_{yz}, \quad \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy}$$

les six paramètres de la déformation élastique et calorifique (n° 5) d'un parallélépipède élémentaire, pris en un point quelconque (x, y, z) du système;

4° ϖ_F le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume, au même point (x, y, z);

5° F_{es} et F_{is} les forces de liaisons surabondantes extérieures et intérieures du système.

Considérons maintenant le système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné. Si on le soumet aux forces F, F_{es} et F_{is}, ainsi qu'à la variation de température de τ degrés, il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique soumis aux seules forces F et à la variation de température. En particulier, dans ce système isostatique, les déplacements élastiques et calorifiques des points A_1, A_2, A_3, ..., les rotations élastiques et calorifiques des droites $a_1a'_1$, $a_2a'_2$, $a_3a'_3$, ... et les paramètres de la déformation d'un parallélépipède quelconque sont les mêmes que dans le système hyperstatique.

Le potentiel interne est également le même, de sorte qu'on peut écrire, d'après la formule (4) (n° 4) et la Remarque du n° 5.

$$(a) \qquad \overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is}} = \varpi_F = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{\mu}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2),$$

en désignant par $\overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume au point (x, y, z), du système isostatique déformé par les forces F, F_{es}, F_{is} (la barre surmontant la lettre ϖ est destinée à indiquer que ce potentiel est relatif au système isostatique).

Au susdit système isostatique, supposé soustrait à l'action des forces F, F_{es}, F_{is} et de la variation de température, appliquons :

1° Aux points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots,$$

des *forces auxiliaires*, de grandeurs quelconques,

$$\mathcal{F}_1, \quad \mathcal{F}_2, \quad \mathcal{F}_3, \quad \ldots,$$

suivant les directions

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \ldots;$$

2° Aux points

$$a_1, a'_1, \quad a_2, a'_2, \quad a_3, a'_3, \quad \ldots,$$

des forces formant des *couples auxiliaires*, de grandeurs quelconques,

$$\mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3, \quad \ldots,$$

d'axes dirigés suivant

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \ldots.$$

Sous l'action de ces forces et couples auxiliaires, le système isostatique prend un nouvel état de déformation; soient :

$\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \ldots$ les nouvelles valeurs des déplacements projetés et des rotations projetées $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$;

$\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z, \gamma'_{yz}, \gamma'_{zx}, \gamma'_{xy}$ les nouvelles valeurs des paramètres de la déformation d'un parallélépipède élémentaire pris en un point quelconque (x, y, z);

$\overline{\varpi}_{\mathcal{F}, \mathfrak{S}}$ le potentiel interne, rapporté à l'unité de volume au point (x, y, z), potentiel qui a pour expression, d'après la formule (4) (n° 4),

$$(a') \quad \overline{\varpi}_{\mathcal{F}, \mathfrak{S}} = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z)^2 + \mu(\varepsilon'^2_x + \varepsilon'^2_y + \varepsilon'^2_z + \frac{\mu}{2}(\gamma'^2_{yz} + \gamma'^2_{zx} + \gamma'^2_{xy});$$

$\overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathfrak{S}}$ le potentiel interne total du système, qui, d'après la formule (5) (n° 4), a pour valeur

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{F}, \mathfrak{S}} = \int\int\int \overline{\varpi}_{\mathcal{F}, \mathfrak{S}}\, dx\, dy\, dz.$$

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CULLIS (G. E.). — *Matrices and Determnoids.* Vol. II. In-8, XXIV-556 pages. (University of Calcutta, Reader Ship Lectures.) Cambridge, at the University Press, 1918.

MÉLANGES.

LES MÉTHODES MODERNES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX (*fin*);

PAR M. BERTRAND DE FONTVIOLANT,
Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

Faisons subir, au système isostatique ainsi déformé, une déformation virtuelle compatible avec les liaisons de ce système; et soient $\delta\lambda'_1, \delta\lambda'_2, \delta\lambda'_3, \ldots, \delta\varphi'_1, \delta\varphi', \delta\varphi'_3, \ldots, \delta\varepsilon'_x, \delta\varepsilon'_y, \delta\varepsilon'_z, \delta\gamma'_{yz}, \delta\gamma'_{zx}, \delta\gamma'_{xy}$, les variations virtuelles correspondantes des déplacements projetés, des rotations projetées et des paramètres de la déformation. Le théorème du travail virtuel donne immédiatement l'équation

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1\,\delta\lambda'_1 + \mathcal{F}_2\,\delta\lambda'_2 + \mathcal{F}_3\,\delta\lambda'_3 + \ldots + \mathcal{C}_1\,\delta\varphi'_1 + \mathcal{C}_2\,\delta\varphi'_2 + \mathcal{C}_3\,\delta\varphi'_3 \\
&= \int\int\int\Bigg(\frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_x}\,\delta\varepsilon'_x + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_y}\,\delta\varepsilon'_y + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\varepsilon'_z}\,\delta\varepsilon'_z \\
&\qquad + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{yz}}\,\delta\gamma'_{yz} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{zx}}\,\delta\gamma'_{zx} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial\gamma'_{xy}}\,\delta\gamma'_{xy}\Bigg)\,dx\,dy\,dz;
\end{aligned}$$

le premier membre de cette équation représente, en effet, le travail virtuel des forces et couples auxiliaires [1], et le second membre, qui est la variation virtuelle du potentiel interne $\overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$, représente le travail virtuel, changé de signe, des forces intérieures.

Or, la déformation virtuelle étant seulement astreinte à être compatible avec les liaisons du système isostatique considéré, on peut prendre, pour cette déformation, la déformation réelle subie par ce système, sous l'action des forces F, F_e, F_i, et de la varia-

[1] Les forces de liaison du système isostatique supposé soumis aux forces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, ... n'interviennent pas dans l'expression du travail, attendu que les travaux virtuels de ces forces de liaison sont nuls, en raison de ces liaisons mêmes.

tion de température de τ degrés, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
&\delta\lambda'_1 = \lambda_1, \quad \delta\lambda'_2 = \lambda_2, \quad \delta\lambda'_3 = \lambda_3, \quad \ldots;\\
&\delta\varphi'_1 = \varphi_1, \quad \delta\varphi'_2 = \varphi_2, \quad \delta\varphi'_3 = \varphi_3, \quad \ldots;\\
&\delta\varepsilon'_x = \varepsilon_x - \alpha\tau, \quad \delta\varepsilon'_y = \varepsilon_y - \alpha\tau, \quad \delta\varepsilon'_z = \varepsilon_z - \alpha\tau;\\
&\delta\gamma'_{yz} = \gamma_{yz}, \quad \delta\gamma'_{zx} = \gamma_{zx}, \quad \delta\gamma'_{xy} = \gamma_{xy};
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
(b)\quad & \mathcal{F}_1\lambda_1 + \mathcal{F}_2\lambda_2 + \mathcal{F}_3\lambda_3 + \ldots + \mathfrak{C}_1\varphi_1 + \mathfrak{C}_2\varphi_2 + \mathfrak{C}_3\varphi_3 + \ldots\\
&= \int\int\int \left(\frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathfrak{C}}}{\partial\varepsilon'_x}\varepsilon_x + \ldots + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathfrak{C}}}{\partial\gamma'_{xy}}\gamma_{xy} \right) dx\,dy\,dz\\
&\quad - \alpha\tau \int\int\int \left(\frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathfrak{C}}}{\partial\varepsilon'_x} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathfrak{C}}}{\partial\varepsilon'_y} + \frac{\partial\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathfrak{C}}}{\partial\varepsilon'_z} \right) dx\,dy\,dz,
\end{aligned}$$

étant admis que la variation de température τ est la même en tous les points du système.

Transformons les deux intégrales du second membre de l'équation (b). En ce qui concerne la première, imaginons qu'au système isostatique on applique simultanément : 1° les forces F, F_{es} et F_{is}; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{C}$, sans d'ailleurs soumettre ce système à aucune variation de température; d'après le principe de la superposition, les paramètres de la déformation élastique produite par l'ensemble de ces forces et couples, ont pour valeurs, en un point quelconque (x, y, z),

$$\varepsilon_x + \varepsilon'_x, \quad \varepsilon_y + \varepsilon'_y, \quad \varepsilon_z + \varepsilon'_z, \quad \gamma_{yz} + \gamma'_{yz}, \quad \gamma_{zx} + \gamma'_{zx}, \quad \gamma_{xy} + \gamma'_{xy};$$

par suite, en désignant par $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathfrak{C}}$ le potentiel interne rapporté à l'unité de volume en ce point du système déformé par les forces et couples précités, on a

$$\begin{aligned}
(a'')\quad \overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathfrak{C}} = {} & \frac{\lambda}{2}\,[(\varepsilon_x + \varepsilon'_x) + (\varepsilon_y + \varepsilon'_y) + (\varepsilon_z + \varepsilon'_z)]^2\\
& + \mu\,[(\varepsilon_x + \varepsilon'_x)^2 + (\varepsilon_y + \varepsilon'_y)^2 + (\varepsilon_z + \varepsilon'_z)^2]\\
& + \frac{\mu}{2}\,[(\gamma_{yz} + \gamma'_{yz})^2 + (\gamma_{zx} + \gamma'_{zx})^2 + (\gamma_{xy} + \gamma'_{xy})^2].
\end{aligned}$$

L'expression (a) de $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}}$ est une fonction homogène et du second degré des six quantités $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{xy}$ et, pour passer de cette expression à celles (a') et (a'') de $\overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathfrak{C}}$ et de $\overline{\varpi}_{F, F_{es}, F_{is}, \mathcal{F}, \mathfrak{C}}$, il suffit d'y remplacer ces six quantités, d'abord par $\varepsilon'_x, \ldots, \gamma'_{xy}$,

puis par $(\varepsilon_x + \varepsilon'_x)\ldots(\gamma_{xy} + \gamma'_{xy})$; par conséquent, en vertu de la propriété des fonctions homogènes et du second degré déjà utilisée au n° 30, on a identiquement

$$\frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_x}\varepsilon_x + \ldots + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \gamma'_{xy}}\gamma_{xy} = \overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} - \left(\overline{\varpi}_{F,F_{es},F_{is}} + \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right).$$

En multipliant les deux membres de cette identité par $dx\,dy\,dz$ et en l'intégrant pour le volume total occupé par le système de corps, on obtient

$$(c)\qquad \iiint\left(\frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_x}\varepsilon_x + \ldots + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \gamma'_{xy}}\gamma_{xy}\right)dx\,dy\,dz$$
$$= \overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right).$$

C'est l'expression transformée de la première intégrale du second membre de l'équation (b), expression dans laquelle $\overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is}}$, $\overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$ et $\Pi_{F,F_{es},F_{is}}$ représentent les valeurs du potentiel interne total du système isostatique, déformé respectivement par : 1° les forces F, F_{es}, F_{is}; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$; 3° l'ensemble de ces mêmes forces et couples.

Quant à la seconde intégrale de l'équation (b), on peut écrire, en vertu des formules (6) (n° 4),

$$(d)\qquad \iiint\left(\frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_x} + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_y} + \frac{\partial \overline{\varpi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}}{\partial \varepsilon'_z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint (n'_x + n'_y + n'_z)\,dx\,dy\,dz,$$

en désignant par n'_x, n'_y, n'_z les fatigues normales sur trois éléments rectangulaires entre eux, menés en un point quelconque (x, y, z) du système isostatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

En remplaçant les deux intégrales du second membre de l'équation (b), par leurs expressions (c) et (d), et en écrivant le premier membre sous forme abrégée, on obtient finalement

$$(37)\qquad \sum \mathcal{F}\lambda + \sum \mathcal{C}\varphi = \overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is},\mathcal{F},\mathcal{C}} - \left(\overline{\Pi}_{F,F_{es},F_{is}} + \overline{\Pi}_{\mathcal{F},\mathcal{C}}\right)$$
$$- \alpha z \iiint (n'_x + n'_y + n'_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation générale (31) (n° 29) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes.

En reprenant la démonstration précédente dans le cas d'un système de corps à fibres moyennes, on retrouve également l'équation (32) (n° 30), dont le développement conduit à l'équation générale (33) (même numéro) de l'élasticité des systèmes dont il s'agit

$$(38)\quad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}_\eta \frac{T_\eta}{G\Omega} + \ldots + \mathfrak{M}_\zeta \frac{M_\zeta}{EI} \right] ds.$$

L'application de cette dernière équation au calcul des déplacements et des rotations élastiques et calorifiques, ainsi qu'à la détermination des forces de liaisons des systèmes hyperstatiques, a été exposée précédemment (n°s 33 et 36); il n'y a pas lieu d'y revenir.

39. Variantes de l'équation générale de l'élasticité. — I. *Cas des systèmes de corps isotropes.* — Pour établir, au n° 38, l'équation générale (37) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes, nous avons considéré le système *isostatique* obtenu par la suppression des liaisons surabondantes du système hyperstatique donné, et nous avons appliqué le théorème du travail virtuel à ce système supposé soumis aux forces et aux couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$, dont la grandeur est arbitraire, en prenant, comme déplacements virtuels, les déplacements réels résultant de la déformation du système hyperstatique soumis aux forces données F et à la variation de température donnée τ.

Si l'on reprend exactement la même démonstration en considérant non plus ce système isostatique, mais le système *hyperstatique* donné, on obtient la variante que voici de l'équation (37),

$$(39)\quad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi$$
$$= \Pi_{F,\mathfrak{F},\mathfrak{S}} - (\Pi_F + \Pi_{\mathfrak{F},\mathfrak{S}}) - \alpha\tau \iiint (n''_x + n''_y + n''_z)\, dx\, dy\, dz,$$

en désignant par n''_x, n''_y, n''_z les fatigues normales sur trois éléments rectangulaires, menés en un point quelconque (x, y, z) du système hyperstatique soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$.

Si, enfin, on reprend encore la même démonstration, en considérant le système *isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement*, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes intérieures et de *toutes* les liaisons extérieures du système hyperstatique donné, et en supposant ce système soumis, non plus à des forces et couples auxiliaires de grandeurs absolument arbitraires, mais à des forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$ astreints à la condition de s'équilibrer sur ledit système, on obtient la seconde variante

$$(40)\qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = \overline{\overline{\Pi}}_{F,F_e,F_{is},\mathfrak{F},\mathfrak{S}} - \left(\overline{\overline{\Pi}}_{F,F_e,F_{is}} + \overline{\overline{\Pi}}_{\mathfrak{F},\mathfrak{S}}\right) - \alpha\tau \iiint (n'''_x + n'''_y + n'''_z)\, dx\, dy\, dz,$$

dans laquelle : $\overline{\overline{\Pi}}_{F,F_e,F_{is}}$, $\overline{\overline{\Pi}}_{\mathfrak{F},\mathfrak{S}}$ et $\overline{\overline{\Pi}}_{F,F_e,F_{is},\mathfrak{F},\mathfrak{S}}$ désignent respectivement le potentiel interne total du système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement déformé par : 1° les forces F données, toutes les forces de liaisons extérieures F_e du système hyperstatique donné et les forces de liaisons intérieures surabondantes F_{is} de ce dernier système; 2° les forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$; 3° l'ensemble de ces forces et couples ;

n'''_x, n'''_y, n'''_z sont les fatigues normales, sur trois éléments rectangulaires menés en un point quelconque (x, y, z) du système isostatique intérieurement et complètement libre extérieurement soumis aux forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$.

II. *Cas des systèmes de corps à fibres moyennes.* — Aux deux variantes, qui viennent d'être indiquées, de l'équation générale (37) (n° 38) de l'élasticité des systèmes de corps isotropes, correspondent deux variantes de l'équation générale (38) (même numéro) de l'élasticité des systèmes de corps à fibres moyennes.

Ces deux dernières variantes montrent que, dans l'équation (38), on peut, à volonté, considérer les éléments de réduction $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$, comme résultant soit de l'application de forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$, de grandeurs arbitraires, au système *isostatique* défini précédemment, soit de l'application de ces mêmes forces et couples au système *hyperstatique* donné; soit, enfin, de l'application, au système *isostatique intérieurement et*

complètement libre extérieurement, défini précédemment, de forces et couples auxiliaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ astreints à la condition de s'équilibrer sur ce système.

C'est au dernier de ces trois points de vue que nous nous sommes placés dans notre Mémoire déjà cité sur l'équation *générale de l'élasticité et ses applications;* ici, nous avons adopté le premier, parce qu'il rattache d'une manière plus directe la seconde méthode fondée sur le théorème des forces vives, à la méthode fondée sur le théorème du travail virtuel. En ce qui concerne la facilité des applications, ces deux points de vue sont d'ailleurs absolument équivalents : effectivement, qu'on choisisse l'un ou l'autre, les éléments de réduction $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}_\eta$, ..., $\mathfrak{M}_\zeta$ sont toujours statiquement déterminés et, par suite, se calculent aisément.

Le second point de vue n'a qu'un intérêt purement théorique.

Théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, complété.

40. Ce théorème découle immédiatement de l'équation générale de l'élasticité. Considérons un système de corps isotropes ou à fibres moyennes; supposons-le hyperstatique (le cas d'un système isostatique sera regardé comme cas particulier; celui d'un corps unique, également).

Appliquons-lui un premier système de forces (A). Soient : m le nombre de ces forces, F_{A_i} l'une quelconque d'entre elles, A_i son point d'application, Δ_i sa direction, Π_{F_A} le potentiel interne total du système de corps déformé par ces forces.

Remplaçons le système de forces (A) par un second système de forces (B). Soient : n le nombre des forces de ce second système, F_{B_i} l'une quelconque d'entre elles, B_i son point d'application, Δ_{B_i} sa direction, Π_{F_B} le potentiel interne total du système de corps déformé par ces forces.

Appelons :

$\lambda^B_{A_i}$ la projection, sur la direction Δ_{A_i}, du déplacement élastique du point A_i sous l'action du système de forces (B);

$\lambda^A_{B_i}$ la projection, sur la direction Δ_{B_i}, du déplacement élastique du point B_i, sous l'action du système de forces (A);

Π_{F_A, F_B} ou Π_{F_B, F_A} la valeur que prendrait le potentiel interne total du système de corps, si celui-ci était déformé par les deux systèmes de forces (A) et (B) agissant simultanément.

Cela posé, la variante (39) (n° 39) de l'équation générale de l'élasticité, si l'on y annule la variation de température τ, qui n'intervient pas dans la question présente, et si l'on y annule également les couples auxiliaires $\mathfrak{C}$, se réduit à

$$\sum \mathfrak{F}\lambda = \Pi_{F, \mathfrak{F}} - (\Pi_F + \Pi_{\mathfrak{F}}).$$

Cette équation appliquée à la déformation du système de corps, par le système de forces (B), donne immédiatement, si l'on prend comme forces auxiliaires $\mathfrak{F}$, les forces du système A,

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} F_{A_i} \lambda_{A_i}^{B} = \Pi_{F_B, F_A} - (\Pi_{F_B} + \Pi_{F_A}).$$

Appliquée à la déformation du système de corps, par le système de forces (A), cette même équation donne, si l'on prend comme forces auxiliaires les forces du système (B),

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i} \lambda_{B_i}^{A} = \Pi_{F_A, F_B} - (\Pi_{F_A} + \Pi_{F_B}).$$

Les deux relations (a) et (b) sont précisément celles (e) et (f) (n° 26) qui se traduisent par le théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, complété.

Application de l'Équation générale de l'Élasticité, à la Statique graphique des arcs élastiques.

41. Dans son magistral Traité de Statique graphique, Maurice Levy a exposé de très remarquables méthodes graphiques, pour le calcul des arcs élastiques, astreints à des liaisons surabondantes et soumis à des forces extérieures agissant dans le plan de leur fibre moyenne, ainsi qu'à une variation de température.

Ces méthodes ne tiennent compte que des déformations élastiques correspondant au couple de flexion; elles négligent celles correspondant à l'effort normal et à l'effort tranchant.

Elles sont fondées sur les propriétés que possèdent des *forces fictives* parallèles entre elles, appliquées à chaque élément ds de la fibre moyenne de l'arc et égales à $\frac{M}{EI}ds$, M désignant le moment de flexion dans la section d'abscisse curviligne s, I le moment d'inertie de cette section et E le module d'élasticité longitudinale de la matière constituant l'arc. Ces propriétés, particulières à chaque type d'arc, résultent des conditions auxquelles celui-ci est astreint, dans sa déformation élastique, du fait de ses liaisons surabondantes; elles sont établies, dans le Traité de Maurice Levy, au moyen des expressions des déplacements élastiques, obtenues par les méthodes géométriques et cinématiques de calcul des déformations; elles se déduisent, d'ailleurs, plus simplement de l'équation aux liaisons surabondantes (n° 36) ou (ce qui, au fond, revient au même), de l'équation générale de l'élasticité des systèmes de corps à fibres moyennes,

$$(a)\qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = \int \left[\mathfrak{N}\left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha\tau\right) + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI}\right] ds,$$

réduite à

$$(b)\qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \mathfrak{M}\frac{M}{EI}\, ds,$$

par la suppression des termes correspondant aux déformations dues à l'effort normal N et à l'effort tranchant T.

Le degré d'approximation qu'on obtient en négligeant ces déformations peut souvent être considéré comme suffisant; mais, dans certains cas, notamment lorsqu'il s'agit d'arcs surbaissés, il n'en est plus de même et il est alors nécessaire de tenir compte, sinon des déformations dues à l'effort tranchant qui sont toujours les plus faibles, du moins de celles dues à l'effort normal. On peut y parvenir par des correctifs assez simples qui, tout en n'altérant en rien la contexture des méthodes graphiques, permettent d'y faire intervenir, à volonté, soit seulement ces dernières déformations, soit également celles dues à l'effort tranchant [1]. Voici comment :

---

[1] Bertrand de Fontviolant, *Mémoire sur la Statique graphique des arcs élastiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, 1890, p. 697, et *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, avril 1890, p. 403).

42. *Introduction des déformations dues à l'effort normal.* — r désignant le rayon de giration d'une section quelconque (S) de l'arc, autour de l'axe mené par le centre de gravité G de cette

Fig. 4.

section (*fig.* 4) normalement au plan de la fibre moyenne, portons, sur l'intersection de ce plan avec celui de la section (S),

$$GH' = GH'' = r.$$

Appelons :

Points conjugués relatifs à la section (S), les deux points H' et H'' qui ne sont autres que les deux sommets de l'ellipse centrale d'inertie de la section;

Lignes conjuguées, les deux lieux A'B' et A''B'' des points H' et H'' relatifs à toutes les sections de l'arc; à chaque élément ds de la fibre moyenne AB de l'arc correspondent deux éléments ds' et ds'' des lignes conjuguées;

Moments conjugués relatifs à la section (S), les deux sommes respectives des moments, par rapport à H' et à H'', des forces élastiques développées dans cette section (ou des forces extérieures agissant à gauche de cette même section);

M' et M'' les valeurs de ces moments, dans l'arc hyperstatique considéré, soumis à des forces extérieures données F et à une variation de température τ;

$\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ les valeurs de ces mêmes moments, dans l'arc isostatique, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de l'arc hyperstatique, et soumis à des forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$.

On a immédiatement

$$M' = M + Nr, \qquad M'' = M - Nr;$$

d'où

$$N = \frac{M' - M''}{2r}, \qquad M = \frac{M' + M''}{2}.$$

De même,

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{2r}, \qquad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''}{2}.$$

Or, l'équation générale (a) (n° 41), suppression faite du terme correspondant aux déformations dues à l'effort tranchant, peut s'écrire

$$\sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{T}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{N} \frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{M} \frac{M}{EI} \right) ds.$$

En remplaçant, dans la seconde intégrale, les efforts normaux et les moments de flexion par leurs expressions ci-dessus, et en ayant égard à la relation $I = \Omega r^2$, on obtient, après réductions,

$$\sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{T}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{M}' \frac{M'}{2EI} + \mathfrak{M}'' \frac{M''}{2EI} \right) ds,$$

les intégrales s'étendant à la longueur totale de la fibre moyenne AB de l'arc.

Posons

$$I' = 2I$$

et convenons de représenter indistinctement par :

M' l'un ou l'autre des deux moments conjugués M' et M'';

$\mathfrak{M}'$ l'un ou l'autre des deux moments conjugués $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$;

ds' l'un ou l'autre des deux éléments ds' et ds'' des deux lignes conjuguées, correspondant à un élément ds de la fibre moyenne.

Moyennant cela, on peut écrire

$$(c) \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda - \sum \mathfrak{T}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \mathfrak{M}' \frac{M'}{EI'} \frac{ds}{ds'} ds',$$

la seconde intégrale s'étendant à la longueur totale des deux lignes conjuguées A'B' et A''B''.

En comparant l'équation (b) (n° 41) qui néglige les déformations dues à l'effort normal, à l'équation (c) qui en tient compte, on voit que, pour passer de la première à la seconde, il suffit d'y remplacer les moments de flexion M et $\mathfrak{M}$ par les moments conjugués M' et $\mathfrak{M}'$, les moments d'inertie I, par $I' = 2I$, et d'y

regarder la seconde intégrale comme étendue non plus à la longueur totale de la ligne moyenne, mais bien à la longueur totale des deux lignes conjuguées.

On peut, dès lors, concevoir, sans entrer dans la démonstration donnée dans notre Mémoire sur la *Statique graphique des arcs élastiques*, que :

Pour introduire les déformations dues à l'effort normal, dans les méthodes de la Statique graphique qui les négligent, il suffit de remplacer, dans ces méthodes, les forces fictives parallèles $\frac{M}{EI}ds$, *appliquées aux divers éléments ds de la fibre moyenne de l'arc considéré, par des forces fictives*

$$\frac{M'}{EI'}\frac{ds}{ds'}ds' = \frac{M'}{EI'}ds,$$

parallèles aux premières et appliquées à chaque élément ds' des deux lignes conjuguées.

43. *Introduction des déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.* — Appelons *points conjugués* relatifs à une section quelconque (S), de centre de gravité G (*fig.* 5), les trois points H', H'' et H''' qui, situés dans le plan de la fibre moyenne, ont pour coordonnées rapportées à la tangente Gx à cette fibre et à la normale Gy :

$$x' = \frac{r\sqrt{2a}}{2}, \qquad y' = -\frac{r\sqrt{6}}{2},$$

$$x'' = \frac{r\sqrt{2a}}{2}, \qquad y'' = \frac{r\sqrt{6}}{2},$$

$$x''' = -r\sqrt{2a}, \qquad y''' = 0,$$

a désignant le rapport du module d'élasticité longitudinale E au module d'élasticité transversale G.

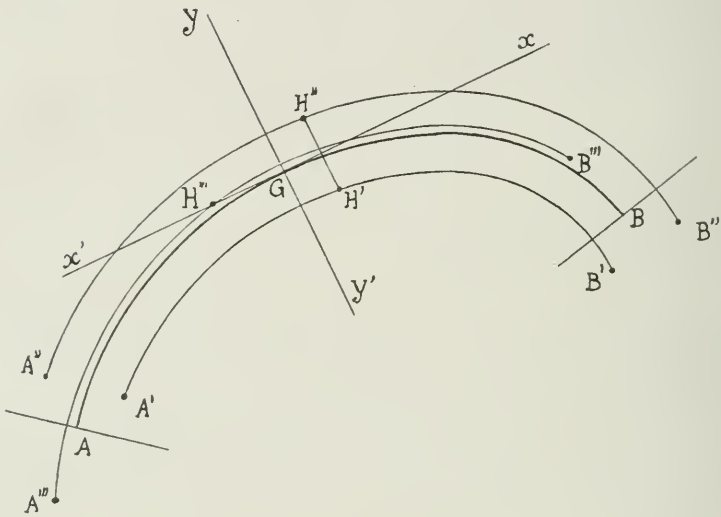
Dès lors, par analogie avec ce qui a été dit précédemment, l'arc admet *trois lignes conjuguées* A'B', A''B'', A'''B''', et à chaque élément ds de sa fibre moyenne, correspondent trois éléments ds', ds'' et ds''' des lignes conjuguées; de plus, à toute section (S) répondent *trois moments conjugués*.

Soient :

M', M'', M''' les valeurs de ces moments, dans l'arc hyperstatique considéré, soumis à des forces extérieures F et à une variation de température τ;

$\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ les valeurs de ces mêmes moments, dans l'arc isostatique, obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de l'arc hyperstatique et soumis à des forces et couples auxiliaires $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$.

Fig. 5.



On a immédiatement

$$M' = M + N\frac{r\sqrt{6}}{2} + T\frac{r\sqrt{2a}}{2},$$

$$M'' = M - N\frac{r\sqrt{6}}{2} + T\frac{r\sqrt{2a}}{2},$$

$$M''' = M - T\,r\sqrt{2a}.$$

D'où l'on tire

$$N = \frac{M' - M''}{r\sqrt{6}},$$

$$T = \frac{M' + M'' - 2M'''}{3r\sqrt{2a}},$$

$$M = \frac{M' + M'' + M'''}{3}.$$

De même,

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{r\sqrt{6}},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' - 2\mathfrak{M}'''}{3r\sqrt{2a}},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}'''}{3}.$$

En portant ces valeurs des efforts normaux, des efforts tranchants et des moments de flexion, dans la seconde intégrale de l'équation générale (a) (n° 41) écrite sous la forme

$$\sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{N}\frac{N}{E\Omega} + \mathfrak{T}\frac{T}{G\Omega} + \mathfrak{M}\frac{M}{EI}\right) ds,$$

on obtient, en tenant compte de ce que $a = \frac{E}{G}$ et de ce que $I = \Omega r^2$,

$$\sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \left(\mathfrak{M}'\frac{M'}{3EI} + \mathfrak{M}''\frac{M''}{3EI} + \mathfrak{M}'''\frac{M'''}{3EI}\right) ds,$$

les intégrales s'étendant à la longueur totale de la fibre moyenne AB de l'arc.

Posons

$$I' = 3I$$

et convenons de représenter indistinctement par :

M' l'un quelconque des trois moments conjugués M', M'' et M''';
$\mathfrak{M}'$ l'un quelconque des trois moments conjugués $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ et $\mathfrak{M}'''$;
ds' l'un quelconque des trois éléments ds', ds'', ds''' des trois lignes conjuguées, correspondant à un élément ds de la fibre moyenne.

Dès lors, on peut écrire

$$(d) \qquad \sum \mathfrak{F}\lambda + \sum \mathfrak{S}\varphi = -\alpha\tau \int \mathfrak{N}\, ds + \int \mathfrak{M}'\frac{M'}{EI'}\frac{ds}{ds'}\, ds',$$

la seconde intégrale s'étendant à la longueur totale des trois lignes conjuguées $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$.

Cette équation est exactement de même forme que l'équation (c), et l'on en conclut, comme précédemment, que :

Pour introduire les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant, dans les méthodes de la Statique graphique qui les négligent, il suffit de remplacer, dans ces

méthodes, les forces fictives parallèles $\frac{M}{EI} ds$ *appliquées en chaque élément ds de la fibre moyenne de l'arc, par des forces fictives*

$$\frac{M'}{EI'} \frac{ds}{ds'} ds' = \frac{M'}{EI'} ds.$$

parallèles aux premières et appliquées à chaque élément ds' des trois lignes conjuguées.

Ajoutons qu'ainsi qu'il est établi dans notre Mémoire précité, à une section de l'arc ne correspond pas qu'un seul système de trois points conjugués, mais bien une infinité, et, par suite, une infinité de systèmes de trois moments conjugués; qu'un arc admet, par conséquent, une infinité de systèmes de trois lignes conjuguées. La proposition ci-dessus est applicable à l'un quelconque de ces systèmes; mais le plus commode entre tous, à utiliser dans les applications, est celui défini plus haut.

Observations finales.

44. De l'exposé qui précède se dégagent les quelques remarques suivantes :

Les méthodes présentées sont entièrement concordantes et toutes trois tiennent compte non seulement des effets des forces extérieures, mais aussi des effets calorifiques.

Bien qu'ayant entre elles des rapports étroits, elles n'ont ni la même portée ni le même caractère théoriques :

La première conduit, comme les deux autres, aux principes de réciprocité qui sont dans des cas particuliers du théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy; mais, dans son état actuel, elle ne permet d'établir directement ni ce beau théorème, ni l'équation générale de l'élasticité, synthèse de toute la théorie des déformations; elle est donc, à cet égard, moins satisfaisante que les deux dernières.

Au point de vue de l'exposé, cette première méthode, fondée sur le théorème des forces vives, est assez délicate, du moins dans la partie relative aux déformations calorifiques, qui nécessite l'extension faite ici de l'équation de Clapeyron. La seconde méthode, également déduite du théorème des forces vives, est, au

contraire, simple et élémentaire. La troisième, tirée du théorème du travail virtuel, fait appel à des notions de Mécanique générale plus élevées, mais elle permet de mettre en compte, dès le début et simultanément, les déformations calorifiques et les déformations élastiques.

A cette troisième méthode il a été reproché de reposer sur une base peu solide, parce qu'il n'existerait pas, a-t-on dit, de démonstration rigoureuse du théorème du travail virtuel. Sans entrer, à ce sujet, dans une discussion qui ne saurait trouver place ici, nous croyons devoir rappeler que, dans l'une des Notes dont il a illustré la *Mécanique analytique* de Lagrange (¹), l'un des mathématiciens les plus subtils du siècle dernier, Joseph Bertrand, s'exprime ainsi : « La première démonstration *rigoureuse* du principe des vitesses virtuelles est due à Fourier (*Journal de l'École Polytechnique*, t. II, an VII). » Au surplus, dans les nombreuses applications qui en ont été faites, le théorème du travail virtuel n'a jamais, que nous sachions, été trouvé en défaut, et, ainsi qu'il ressort de la présente Note, les résultats auxquels il conduit, en ce qui concerne spécialement les calculs de déformation, sont entièrement d'accord avec ceux déduits du théorème des forces vives.

ADDITION A L'ARTICLE DE M. C. DE WAARD (²).

La perte de trois figures en chemin de la Hollande pour la France, étant parvenue trop tard à la connaissance de la rédaction et de l'auteur par la difficulté des communications postales à cette époque, on s'était contenté de mettre les notes qu'on trouve aux pages 172 et 173. Nous faisons ici suivre les trois figures relatives au texte de ces pages (³), en saisissant l'oc-

(¹) *Œuvres de Lagrange* (publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux), t. XI, 1888, p. 263.

(²) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XLII, 1918, p. 157-177.

(³) Nous remarquons que Beaugrand, dans sa description de la Parabole de Descartes à la page 172, suppose un système de coordonnées rapportées à un diamètre et la tangente à l'extrémité de ce diamètre comme l'avait fait Apollonius (*Conica*, I, 11, 12, 13, ed. Heiberg, I, p. 36-53); c'est à ce système aussi que se rapportent les mots de *ordonnées* et de *sommet*.

casion de signaler que, page 172, ligne 24, il faut lire CS au lieu de CB et que tous les derniers quatre termes du nominateur de la fraction seconde

Fig. 1 (p. 172).

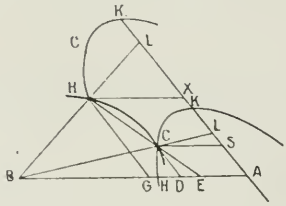


Fig. 2 (p. 172).

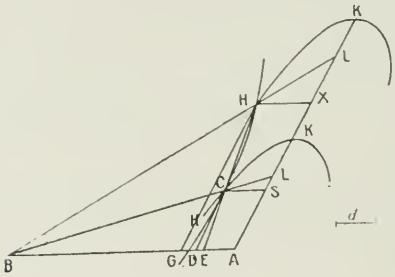
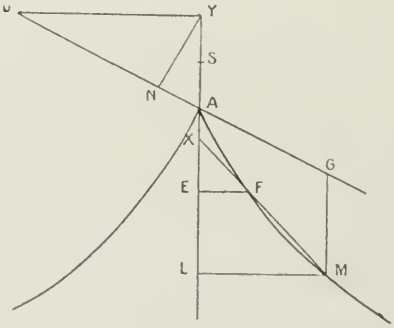


Fig. 3 (p. 173).



à la fin de l'avant-dernière ligne doivent être multipliés par o; enfin que, page 163, ligne 3, il faut lire 3 *yyao* au lieu de *yyao* et, page 174, ligne 5, il faut lire EL au lieu de SL.

C. DE WAARD.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLII; 1918. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

FABRY (E.). — Problèmes de Mécanique rationnelle..... 68-72
HUMBERT (P.). — Sur les surfaces de Poincaré. Thèse..... 221-223
JORDAN (C.). — Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique..... 93-100
JULIA (G.). — Etude sur les formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles ou complexes, ou à indéterminées conjuguées..... 5-9
LANCHESTER (F. W.). — Le vol aérien..... 187-192
MAC-MAHON (Major Percy A.). — Combinatory Analysis..... 37-40
MICHEL (Ch.). — Cours d'Algèbre et d'Analyse..... 126-129
MYRBERG (P.-J.) — Zur Theorie der Konvergenz der Poincareschen Reihen..... 9-11
OCAGNE (M. D'). — Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique..... 182-186
PICARD (E.). — Œuvres de Charles Hermite..... 125-126
PICARD (É.). — Les Sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle..... 181-182
REY PASTOR (J.). — Fundamentos de la Geometria proyectiva superior. 61-68
— Teoria de la representatio conforme..... 281-285
STADLER (S.). — Sur les systèmes d'équations aux différences finies linéaires et homogènes. Thèse..... 223-224
TYCHONIS BRAHE DANI. — Scripta astronomica..... 201-209
WHITTAKER (E. T.). — A Treatise on the analytical Dynamics of particles an rigid bodies whith an introduction to the problem of three bodies..... 11-12
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE..... 36, 240. 312

MÉLANGES.

Pages.

BERTRAND DE FONTVIOLANT. — Les méthodes modernes de la résistance des matériaux..... 241-280, 285-312, 313-327

BIRKHOFF (G. D.). — Sur la démonstration directe du dernier théorème de Henri Poincaré, par M. Dantzig..... 41-43

BOTTASSO (M.). — Quelques remarques sur le système vectoriel de MM. Burali-Forti et Marcolongo..... 231-233

BRILLOUIN (M.). — Sources électromagnétiques dans les milieux uniaxes..... 13-36

BUHL (A.). — Sur les sommes abéliennes de volumes cylindroconiques..... 199-200, 209-214

FRÉCHET (M.). — Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits..... 138-156

GONSETH (F.). — Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux. 177-180, 193-194

JULIA (G.). — Sur les valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère en un point de discontinuité des données..... 214-220, 226-231

LALESCO (Th.). — Sur l'addition des noyaux non orthogonaux..... 195-199

PETROVITCH (M.). — L'aire des surfaces de révolution..... 234-240

VERGNE (H.). — Théorie élémentaire du mouvement de précession et de la déviation des projectiles..... 100-124, 130-137

VILLAT (H.). — Quelques récents progrès des théories hydrodynamiques..... 43-60, 71-92

WAARD (C. DE). — Un écrit de Beaugrand sur la méthode des tangentes de Fermat à propos de celle de Descartes..... 157-177, 327-328

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

APPELL (P.), 121.
CAHEN (E.), 37.
COTTON (E.), 11.
HUMBERT (G.), 5, 182.
KŒNIGS (G.), 68.
LATTÈS (F.), 126.
LEBESGUE (H.), 93.
MONTEL (P.), 281.
NÖRLUND (N. E.), 9, 123, 201.
PÉRÈS (J.), 61.
PICARD (E.), 125.
VILLAT (H.), 187.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58498 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SECONDE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. Émile PICARD, *Président.*

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

A. GUILLET, *Secrétaire.*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Joseph-Bara, n° 4, Paris, VIe.

[illegible] Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, [illegible]

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLII. — ANNÉE 1918.

(LIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie. ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1918

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

AVIS

A MM. LES RÉDACTEURS D'ANALYSES DE MÉMOIRES POUR LA « REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES ».

Il semble nécessaire de modifier, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, la façon dont a été conçue parfois l'analyse des Périodiques. Ces analyses doivent être courtes, ayant au maximum une page pour chaque Mémoire. Une analyse bibliographique ne peut remplacer la lecture d'un Mémoire. Il importe seulement que le lecteur du Bulletin apprenne l'existence d'un travail susceptible de l'intéresser, avec son objet général et un ou deux énoncés principaux, s'il y a lieu. Presque personne ne lit entièrement les analyses quand elles contiennent trop de détails. Le point essentiel est que de nombreux journaux soient analysés, et le plus rapidement possible après leur apparition. C'est seulement ainsi que le Bulletin rendra tous les services qu'on peut attendre de lui, en ce qui concerne le dépouillement des Recueils scientifiques.

Pour des Mémoires très importants, des analyses pourront être faites à part dans la première Partie du Bulletin comme pour les Ouvrages. Il y a aussi grand intérêt à ce qu'un groupe de travaux

récents relatifs à un même sujet fasse de temps à autre l'objet d'un article d'ensemble; ces sortes de Revues seraient très appréciées de nos lecteurs. Nous ne doutons pas que les collaborateurs du Bulletin voudront bien apporter tous leurs efforts à l'amélioration d'un Recueil qui doit s'efforcer de tenir le public mathématique, en France et à l'étranger, au courant des publications les plus récentes, en même temps qu'il donne dans ses Mélanges des articles originaux.

Rappelons que, pour tout Ouvrage ou Mémoire écrit en langue étrangère, le titre original doit d'abord être transcrit et que ce titre doit être suivi, entre parenthèses, de sa traduction en français.

EMILE PICARD.

ACTA MATHEMATICA,

Tome 27 (1903) [1].

(Ce Tome des *Acta* est consacré à la mémoire d'Abel et se termine par le fac-similé d'un manuscrit d'Abel.)

Painlevé (*P.*). — Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition (1-54).

Le théorème à démontrer est le suivant :

Tout système de n fonctions (indépendantes) à n variables qui admet un théorème d'addition est une combinaison algébrique de n fonctions abéliennes (ou dégénérescences) à n arguments et aux mêmes périodes.

Pour deux variables (la méthode est identique pour un nombre quelconque), ce théorème se ramène au suivant, énoncé par Weierstrass sans démonstration :

« Soient $u = \mathrm{I}(x, y, z)$, $v = \mathrm{J}(x, y, z)$ deux intégrales de différentielles totales attachées à une surface $S(x, y, z) = 0$, et qui possèdent au plus trois couples de périodes. Si les fonctions inverses $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ renferment rationnellement les constantes initiales (x_0, y_0, z_0), ce sont des fonctions hyperellitiques dégénérées ».

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVI_2, p. 185; t. XXXVII_2, p. 9. L'analyse du Tome 26, étant dans les papiers d'un des rédacteurs qui a été mobilisé et qui a disparu, sera publiée seulement lorsque l'on saura ce qu'est devenue cette analyse. La rédaction remercie M. Michoux d'avoir bien voulu analyser le Tome 27. *Voir* les Analyses des Tomes 28 et suivants à partir du Tome XLI du *Bulletin*, p. 55.

La difficulté de la démonstration consiste dans la discussion des courbes polaires d'une intégrale de différentielle totale.

L'étude précédente permet de déterminer la nature des fonctions inverses x, y, z de u et v et ce théorème trouve son application dans la théorie des équations différentielles du deuxième ordre dont l'intégrale générale renferme algébriquement les deux constantes.

Liouville (*R.*). — Sur une équation différentielle du premier ordre (55-78).

Il s'agit de l'équation déjà considérée par Abel

$$(y+s)\frac{dy}{dx}+p+qy+ry^2=0,$$

où p, q, r, s sont des fonctions de x.

I. L'auteur définit des invariants absolus et la ramène ainsi à une forme canonique.

II. Il examine ici les différents cas d'intégration. L'équation considérée par Halphen dans la théorie des fonctions elliptiques peut s'y ramener.

III. On peut enfin rapprocher de cette équation la suivante :

$$\frac{dy}{dx}-2y(n_1x^2-n_2^2x)+3n_2y^2=0.$$

Cette équation ne peut pas avoir d'intégrale algébrique.

IV. L'auteur étend les cas d'intégration du deuxième paragraphe à un système de trois équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Koch (*H. von*). — Sur le prolongement analytique d'une série de Taylor (79-104).

M. Mittag-Leffler a défini ce qu'il appelle l'*étoile principale* pour une série entière

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots.$$

L'auteur définit une étoile méromorphe, qui est l'étoile la plus étendue à l'intérieur de laquelle la branche $f(z)$ de fonction analytique définie par une telle série reste méromorphe.

Il forme ensuite une expression de $f(z)$ valable en tout point régulier intérieur à cette étoile. Les formules obtenues permettent de décider si un point de l'étoile méromorphe est régulier ou singulier pour la fonction $f(z)$.

Volterra (*V.*). — Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre (105-124).

Dans ce Mémoire il est établi qu'il n'existe aucune figure d'équilibre pour un ellipsoïde hétérogène stratifié par couches homothétiques et concentriques, la densité (et ce point constitue la difficulté de la question) étant soumise à la seule condition d'être une fonction intégrable.

Des résultats de ce genre, quoique négatifs, sont d'un gros intérêt en Mécanique céleste.

Stäckel (*P.*). — Beweis eines Satzes von Abel über die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$. (Démonstration d'un théorème d'Abel sur l'équation $x^n + y^n + z^n = 0$) (125-128).

x, y, z désignent des entiers non nuls positifs ou négatifs et n un entier premier impair positif. L'auteur démontre les formules données par Abel sans explications.

Goursat (*E.*). — Sur un problème d'inversion résolu par Abel (129-134).

L'équation fonctionnelle

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{(a-x)^n} \qquad (0 < n < 1)$$

est ici résolue par la considération d'intégrales doubles.

Baker (*H.-F.*). — On a system of differential equations leading to periodic fonctions. (Sur un système d'équations différentielles résolu par des fonctions périodiques) (135-156).

Ce Mémoire contient une solution élémentaire et uniquement algébrique d'un systeme d'équations différentielles satisfaites par toutes les fonctions hyperelliptiques sigma, système donné sans démonstration dans les *Proceedings of Cambridge*, vol. IX, part XI, 1898, p. 513. La méthode suivie est en connexion avec la théorie des intégrales de différentielles totales de M. Picard; elle permet de généraliser les fonctions sigma, et, en particulier, de faire la géométrie de la surface quartique de Kummer.

Berry (*A.*). — A generalisation of a theorem of M. Picard with regard to integrals of the first kind of total differentials. (Une généralisation d'un théorème de M. Picard concernant les intégrales de première espèce de différentielles totales) (157-162).

Pour qu'une surface d'ordre n admette une intégrale de différentielles totales de première espece, il est nécessaire qu'elle satisfasse à certaines conditions. Inversement, si cette surface admet une telle intégrale de premiere espèce, elle

doit avoir au moins un point singulier. L'auteur se propose d'étudier les conditions, d'ailleurs très mal connues, qui concernent les singularités d'ordre plus élevé.

Wiman (*A.*). — Ueber die metacyklischen Gleichungen von Primzahlgrad. [Sur les équations métacycliques de degré premier] (163-176).

L'auteur se propose de compléter les recherches de Kronecker, Hilbert et Weber sur la résolution des équations métacycliques (c'est-à-dire résolubles par radicaux) et de degré p premier. En premier lieu, il étudie le groupe du corps défini dans le domaine de rationalité donné par les racines de l'équation et une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Il étudie ensuite les résolvantes, les formes des racines et enfin les transformations rationnelles de racines.

Hadamard (*M.*). — Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries (177-184).

L'auteur démontre les deux théorèmes suivants :

Étant données une suite de nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *et une série convergente* (absolument ou non)

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle donne naissance à une série également convergente

$$\xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n + \ldots$$

est que la série

$$\xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n) + \ldots$$

soit absolument convergente.

Le résultat subsiste si les ξ *sont imaginaires.*

Réciproquement : *la convergence de la série* $\xi_n u_n$ *entraîne celle de la série* u_n, *si, à la condition que la série* $(\xi_{n+1} - \xi_n)$ *est absolument convergente, on ajoute celle que sa somme est différente de zero.*

Suivent diverses applications.

Störmer (*C.*). — Quelques propriétés arithmétiques des intégrales elliptiques et leurs applications à la théorie des fonctions entières transcendantes (185-208).

Voici les diverses parties de ce Mémoire. Soient

$$y = p(u), \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

avec $y = \infty$ pour $u = 0$: si n est un entier positif, on a

$$p(nu) - y(u) = -\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

I. Limite supérieure des ψ : on a

$$|\psi_n| < e^{an^2},$$

a étant une constante indépendante de n, et dépendant uniquement des valeurs données à y, g_2, g_3.

II. Limites supérieure et inférieure de $|p(nu)|$ quand y, g_2, g_3 sont des nombres algébriques donnés (définis comme fonctions entières à coefficients fractionnaires d'une même irrationnelle). On a

$$e^{-\lambda' n^2} < |p(nu)| < e^{\lambda n^2},$$

où λ, λ' sont deux constantes indépendantes de l'entier n.

III. Limites supérieure et inférieure d'une fonction algébrique de

$$p(n_1 u_1 + n_2 u_2 + \ldots + n_\nu u_\nu)|:$$

on a encore des limites de la forme $e^{-\lambda' n^2}$ et $e^{\lambda n^2}$, où λ, λ' sont des constantes indépendantes des entiers n_i.

IV. Application de ces résultats aux fonctions algébriques et abéliennes. Si en particulier un nombre incommensurable réel α est le rapport de deux intégrales elliptiques, on aura

$$|n_1 \alpha - n_2| > e^{-\lambda n^2}.$$

V. Application à la théorie des fonctions transcendantes entières $F(z)$ dont la distribution des zéros est ordinaire. L'auteur applique les résultats obtenus à la fonction

$$F(z) = \sigma_1(z) \cdot \sigma_2(z),$$

où l'on pose

$$\sigma_i(z) = \sigma(z \mid \omega_i, \omega_i') \qquad (i = 1, 2)$$

et où l'on suppose réels les deux rapports $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\beta = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}$. Il trouve des conditions suffisantes pour que la distribution des zéros de $F(z)$ soit ordinaire; il montre que ces conditions s'expriment exclusivement par des propriétés arithmétiques de α et β.

Hobson (*E.-W.*). — On the integration of series. [Sur l'intégration des séries.] (209-216).

Cette Note a pour but de développer les idées d'Abel, Seidel, Stockes, Osgood et Baire sur la convergence uniforme d'une série

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions continues de la variable réelle x dans un

intervalle (a, b). En supposant que cette série est convergente et a pour somme $s(x)$, l'auteur montre que la série peut être intégrée terme à terme (dans l'intervalle a, b) et a pour somme l'intégrale de la somme $s(x)$, pourvu que dans l'intervalle d'intégration il n'y ait aucun point où la mesure de la convergence uniforme soit infinie.

Burnside (*W.*). — On soluble irreductible groups of linear substitutions in a prime number of variables. [Sur les groupes irréductibles résolubles de substitutions linéaires à un nombre premier de variables.] (217-224).

Un groupe de substitutions linéaires à p variables est dit *irréductible* s'il est impossible de trouver q ($< p$) fonctions linéaires de variables se transformant en elles-mêmes par les substitutions du groupe.

Si un groupe est isomorphe (simplement ou non) à un groupe irréductible de substitutions linéaires à p variables, p doit être un diviseur de l'ordre du groupe considéré.

Les groupes G de substitutions linéaires à p variables (p premier) peuvent se diviser en deux classes. Le sous-groupe I (d'ordre n), formé des opérations invariantes de G, est un groupe cyclique.

En premier lieu, on suppose que le sous-groupe J (d'ordre m), invariant et abélien dans G (et qui contient I), possède des opérations n'appartenant pas à I. Le groupe G | J est alors simplement isomorphe à un groupe de permutations des p variables, transitif et résoluble. Les opérations de G sont de la forme

$$z_i' = \omega_i z_{ai+b},$$

où ω_i est une racine $p^{ième}$ de l'unité, et $ai + b$ pris selon le module p. L'auteur appelle *groupe avec facteurs* un groupe dont les opérations sont de cette forme.

En second lieu, on suppose que I est le plus grand sous-groupe invariant abélien de G. Soit H le sous-groupe invariant de G contenant I et d'ordre le plus faible; H est représentable par un groupe de permutations cycliques avec facteurs, ce qui n'a pas lieu pour G.

Weber (*H.*). — Ueber Abel's Summation endlicher Differenzenreihen. [Sommation par Abel de suites aux différences finies.] (225-234).

Il s'agit de l'équation aux différences finies

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x).$$

Par l'application du théorème de Cauchy, l'auteur donne deux formules de résolution de cette équation, dont la seconde a été donnée par Abel pour x réel. Il applique la première formule au calcul des sommes de Gauss en posant

$$\varphi(x) = e^{-\frac{\pi i x^2}{n}},$$

et la seconde au calcul des nombres de Bernoulli.

Schottky (*F.*). — Ueber die Moduln der Thetafunctionen. [Sur les modules des fonctions thêta.] (235-238).

Les fonctions abéliennes définies au moyen de fonctions thêta dépendent de $\frac{\rho(\rho+1)}{2}$ paramètres (qui sont les modules de périodicité), et celles définies par la théorie de Riemann dépendent seulement de $3\rho - 3$ paramètres. Elles sont donc de nature particulière dès que $\rho \geqq 4$, ce qui exige entre les modules un certain nombre de relations. Le but de cette Note est l'étude de ces relations.

On sait qu'à un système de fonctions thêta paires ou impaires appartenant à une même classe, à la moitié des périodes correspond un groupe de permutations. On définit alors des permutations formant une syzygie ou une azygie.

On définit ensuite le groupe de Göpel et les suites azygistiques fermées. On peut définir toutes les fonctions thêta d'un même système en partant d'une azygie qui est soit fermée, soit non fermée. L'existence de telles suites était connue de Riemann.

On peut classer (comme cela vient d'être fait pour les fonctions thêta) les produits de fonctions thêta; et, en se limitant à ceux composés de fonctions thêta de même nature, les classer au moyen de suites azygistiques.

On est alors en mesure de former les relations cherchées et de calculer les coefficients entrant dans ces relations.

Gram (*J.-P.*). — Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (289-304).

Cette Note contient un grand nombre de résultats numériques; en particulier sur le calcul des racines qu'on y effectue au moyen de l'équation

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = 0.$$

Lindelöf (*E.*). — Sur une formule sommatoire générale (305-312).

Il s'agit de l'une des formules déjà rencontrée au Mémoire de Weber. L'auteur l'applique d'abord au prolongement analytique des séries de Taylor $\sum \varphi(n) x^n$ et il en tire ensuite deux expressions de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Borel (*E.*). — Sur les périodes des intégrales abéliennes et sur un nouveau problème très général (313-316).

Ce problème très général et particulièrement difficile concerne les procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres entiers.

Bendixson (*I.*). — Détermination des équations résolubles algébriquement (317-328).

Le but de ce travail est de parvenir à la détermination des conditions néces-

saires et suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble algébriquement, sans faire appel à la théorie de Galois, mais en utilisant les méthodes des deux Mémoires célèbres d'Abel sur la résolution des équations algébriques. Les équations, auxquelles on est conduit, sont identiques au fond à celles qu'on rencontre dans la méthode de Galois.

Kapteyn (*W.*). — Sur l'intégration des différentielles binomes (329-338).

Soit y une fonction algébrique de x définie par l'équation irréductible $\varphi(x, y) = 0$; si l'intégrale $\int y\,dx$ est algébrique en x, elle est exprimable par une fonction entière de y dont les coefficients sont fonctions rationnelles de x.

L'auteur développe ces résultats dans le cas de l'équation algébrique $y^q = F(x)$, et pour diverses formes simples de $F(x)$.

Lerch (*M.*). — Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel (339-352).

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable x intégrable, continue ou discontinue, définie dans tout l'intervalle $(0, \infty)$, et soit l'intégrale

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x).dx.$$

On trouve démontré dans cette Note le théorème suivant :

Si cette intégrale existe pour une certaine valeur de a, elle existera pour toute valeur plus grande. De plus, elle ne peut s'annuler pour une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique sans que l'on ait identiquement $J(a) = 0$ *et en général* $\varphi(x) = 0$.

Suit une application de ces fonctions génératrices.

Mansion (*P.*). — Sur la méthode d'Abel pour l'inversion de la première intégrale elliptique dans le cas où le module a une valeur imaginaire complexe (353-364).

La méthode suivie pour réaliser l'inversion des intégrales elliptiques généralise très simplement la méthode suivie par Abel dans le cas d'un module réel. Les propriétés des fonctions elliptiques sn, cn, dn se retrouvent d'une façon élémentaire.

Fredholm (*I.*). — Sur une classe d'équations fonctionnelles (365-390).

Ce Mémoire concerne les équations du type

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, s)\varphi(s)\,ds = \psi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue.

Nous ne croyons pas devoir insister sur ce Mémoire fondamental dans la théorie des équations fonctionnelles, car tous les résultats en sont aujourd'hui classiques et développés dans de nombreux Traités d'Analyse.

M. Michoux.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Tome XXXVIII, 1907 (1).

Basset (A.-B.). — Multiple points on surfaces. [Les points multiples sur les surfaces.] (1-27).

L'auteur admet (sans l'avoir démontré) que tout point singulier d'une surface est formé par la réunion de « nodes » (points doubles ordinaires) et de « binodes » (points doubles où le cône des tangentes se décompose en deux plans), et que pour un point multiple d'ordre p où le cône des tangentes n'a pas de génératrice double, les constituants sont des « nodes » au nombre de $\frac{1}{2}p(p-1)^2$. Il a donné dans un article précédent les raisons qui le poussent à supposer la vérité de ces propositions.

Partant de là il détermine le nombre de ces points constituants en général. Exemples : Quand le cône des tangentes en un point multiple d'ordre p a δ génératrices doubles et α génératrices de rebroussement, le nombre des « nodes » et des « binodes » constituants sont respectivement

$$C = \frac{1}{2}p(p-1)^2 - \delta - 2\alpha \quad \text{et} \quad B = \delta - 2\alpha.$$

Quand le cône des tangentes se réduit à p plans ne passant pas par une même droite, on a

$$C = \frac{1}{2}p(p-1)(p-2), \quad B = \frac{1}{2}p(p-1).$$

Si les p plans passent par une même droite, on a

$$C = \frac{1}{2}(p-1)(p-2), \quad B = (p-1).$$

etc.

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLI, 1917, p. 5.

Watson (*G.-N.*). — The expansions of produits of hypergeometric functions. [Les développements de produits de fonctions hypergéométriques.] (27-51).

M. Goursat a donné le développement en série entière du carré de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans le cas où $\alpha + \beta + \frac{1}{2} = \gamma$, et γ n'étant pas un entier.

Dans le présent travail l'auteur donne d'abord des développements pour les produits des intégrales elliptiques ordinairement dénommées par K, K', E, E'. Comme on sait que $K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right)$, on voit que ces intégrales ne rentrent pas dans le cas étudié par M. Goursat. L'auteur s'occupe ensuite de carrés de fonctions hypergéométriques non discutées par M. Goursat, et enfin il évalue quelques intégrales définies comprenant les produits des intégrales K, K', etc. La méthode consiste en changements de variables ramenant les équations différentielles auxquelles satisfont ces expressions à la forme étudiée par M. Goursat.

Searle (*J.-H.-C.*). — On the propagation of waves in an atmosphere of varying density. [Sur la propagation des vagues dans une atmosphère de densité variable.] (51-66).

Le problème de la propagation des vagues dans l'atmosphère n'a guère été étudié que dans le cas d'une atmosphère homogène et isotherme. Ces deux hypothèses et en particulier la première sont loin de la réalité, d'où la nécessité d'une nouvelle étude.

L'auteur arrive à une équation différentielle qui donne la vitesse en un point lorsque la température est connue en fonction de la hauteur.

Il examine ensuite deux cas : celui de la température constante, celui de la température fonction linéaire de la hauteur, et intègre dans ces cas l'équation par les fonctions de Bessel. Mais vu l'incertitude des données expérimentales, les résultats précédents sont surtout intéressants au point de vue analytique.

Young (*W.-H.*). — On the distinction of right and left at points of discontinuity. [Sur la distinction entre droite et gauche aux points de discontinuité.] (67-83).

L'objet principal de ce Mémoire est de démontrer que les points de discontinuité de *première espèce* d'une fonction, c'est-à-dire ceux où $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent, mais ont des valeurs différentes, forment un ensemble numérable. Les autres discontinuités qui doivent être considérées comme plus compliquées peuvent au contraire former un ensemble non numérable. Ce sont donc elles qui sont le cas général.

Si ni l'une ni l'autre des limites $f(x-0)$, $f(x-0)$ n'existe, il y a en général trois nombres à considérer :

1° $f(x)$;

2° $\varphi(x)$ défini de la façon suivante : On considère la borne supérieure de $f(x)$ dans un intervalle $x-\varepsilon$, x, on fait tendre ε vers zéro, cette borne a une limite; on refait la même opération pour l'intervalle x, $x+\varepsilon$, on trouve une seconde limite; enfin on prend de ces deux limites celle qui est inférieure ou égale à l'autre. Le nombre ainsi obtenu est $\varphi(x)$;

3° $\psi(x)$ défini comme $\varphi(x)$, mais en prenant les bornes inférieures au lieu des supérieures.

Les cas où il y a plus de trois nombres à considérer sont numérables et doivent par conséquent être considérés comme exceptionnels.

Routh (*E.-J.*). — On a curious dynamical property of particles in equilibrium, and on some properties of spherical trilinear coordinates. [Sur une propriété dynamique curieuse des points matériels en équilibre, et sur quelques propriétés des coordonnées trilinéaires sphériques.] (84-94).

Un point libre est supposé en équilibre *stable* à l'origine des coordonnées sous l'action de la force

$$X = ax + fy + ez, \qquad Y = f'x + by + dz, \qquad Z = e'x + d'y + cz.$$

On astreint ce point à rester sur une surface passant par O. Alors O est encore une position d'équilibre, mais cet équilibre *n'est plus forcément stable*. L'auteur donne la condition géométrique pour qu'il en soit ainsi. Il fait usage des coordonnées trilinéaires sphériques. Soient sur une sphère un triangle ABC, son triangle polaire LMN et P, un point quelconque. Les coordonnées en question sont les quantités

$$\xi = \frac{\cos AP \cos LP}{\cos AL}, \qquad \ldots$$

liées par la relation

$$\xi + \eta + \zeta = 1.$$

Dixon (*A.-C.*). — The binomial theorem. [Le théorème du binome.] (94-96).

Démonstration simple de la formule du binome, et du développement de $\log(1+z)$ dans tous les cas possibles.

Barnes (*E.-W.*). — On generalised Legendre functions. [Sur les fonctions de Legendre généralisées.] (p. 97-204).

Au moyen des fonctions ordinaires de Legendre $P_n(x)$, $Q_n(x)$, on définit les fonctions associées $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$, dans le cas où m est entier, par les équations

$$(1) \qquad \left.\begin{matrix} P_n^m(x) \\ Q_n^m(x) \end{matrix}\right\} = (x^2-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \left\{\begin{matrix} P_n(x) \\ Q_n(x) \end{matrix}\right. .$$

Elles satisfont à

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0.$$

Lorsque m n'est pas entier, $P_n^m(x)$ et $Q_n^m(x)$ sont définies comme solutions de cette équation, se réduisant à leurs valeurs données par (1) lorsque m devient entier. Mais on peut chercher à appliquer encore dans ce cas la définition (1). On sait en effet que si

$$f(x)=\int\Phi(s)x^s\,dx,$$

où Φ et le contour d'intégration sont indépendants de x, alors

$$\frac{d^m}{dx^m}f(x)=\int\Phi(s)\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-m+1)}x^{s-m}\,ds,$$

et cette définition s'applique même si m n'est plus entier.

Or d'après un Mémoire précédent de l'auteur

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s-n)\Gamma(n+1+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1+s)}\left\{\frac{1}{2}(x-1)\right\}^s ds.$$

pourvu que arg. $(x-1)<\pi$. Il en résulte que

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}P_n^m(x)=(x^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s-n)\Gamma(n+1+s)\Gamma(s)}{\Gamma(1-m+s)2^s}(x-1)^{s-m}\,ds.$$

Telle est la nouvelle définition de $P_n^m(x)$; une analogue s'applique à $Q_n^m(x)$. Cette façon de procéder simplifie beaucoup les calculs, en particulier ceux relatifs aux développements en série de ces fonctions.

Elle a donné à l'auteur des résultats nouveaux relativement aux développements asymptotiques de $P_n^m(x)$ et $Q_n^m(x)$, m, n, x ayant des valeurs complexes quelconques, et aussi à l'évaluation de certaines intégrales définies telles que $\int_0^1[P_n^m(x)]^2\,dx$, $\int_0^1 P_n^m(x)\,Q_n^m(x)\,dx$, ..., qui s'expriment par des séries hypergéométriques d'ordre supérieur.

Dickson (*L.-E.*). — A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines on a cubic surface. [Classe de groupes dans un domaine arbitraire, en rapport avec la figure des 27 droites sur une surface cubique.] (205-209).

Addition à un Mémoire précédent (*Quarterly Journal*, vol. XXXII, 1901, p. 145-173) : Simplifications, correction d'une erreur faite sur l'ordre du groupe.

Miller (*G.-A.*). — Transitive groups of degree $p=2q+1$.

p and q being prime numbers. [Groupes transitifs de degré $p = 2q + 1$, p et q étant des nombres premiers.] (210-216).

L'auteur donne, pour former tous les groupes de cette sorte, d'un degré donné, une méthode plus simple que celles connues. Il l'applique en particulier au cas de $p = 83$ et il trouve six groupes transitifs de ce degré.

Young (*W.-H.*). — On the construction of a pointwise discontinuous function all of whose continuities are infinities and which has a finite generalised integral. [Sur la construction d'une fonction ponctuellement discontinue, dont tous les points de continuité sont des infinis et qui a une intégrale généralisée finie.] (217-221).

M. Pompéiu avait déjà formé une fonction jouissant de ces propriétés, mais celle de M. Young a l'avantage de pouvoir être calculée avec n'importe quelle approximation pour n'importe quelle valeur de la variable.

Bromwich (*T.-J.-I'a.*) et *Hardy* (*G.-H.*). — The definition of an infinite integral as the limit of a finite or infinite series [Définition d'une intégrale infinie comme limite d'une série finie ou infinie.] (222-240).

Les auteurs appellent intégrale infinie (*infinite*), une intégrale dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ devient infinie dans les limites de l'intégration, ou bien une intégrale dont une ou les deux limites sont infinies.

Ils distinguent deux types principaux auxquels se ramènent la plupart des autres : 1° les intégrales dans lesquelles les limites sont finies, la fonction devenant infinie pour l'une de ces limites; 2° celles dans lesquelles l'une des limites devient infinie. Ces intégrales sont des doubles limites, car, par exemple $\int_0^1 f(x)\,dx$, où l'on suppose $f(0) = \infty$, est égale à

$$\lim_{x \to 1} \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} \sum_{r=1}^{r=n} f\left(\frac{rx}{n}\right).$$

Comme aucun des $f\left(\frac{rx}{n}\right)$ n'est infini, même pour $x = 1$, on peut se demander si l'intégrale ne serait pas égale tout simplement à

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{r=n} f\left(\frac{r}{n}\right).$$

L'auteur démontre que c'est vrai lorsque $f(x)$ tend vers ∞ en variant toujours dans le même sens.

Pour les intégrales du second type $\int_0^\infty f(x)\,dx$, les auteurs démontrent le théorèmes suivants :

Appelons δ_ν des intervalles successifs de o à ∞, dépendant d'un paramètre α et tendant, quel que soit ν, vers zéro en même temps que α; soient U_ν et L_ν les limites supérieures et inférieures de $f(x)$ dans l'intervalle δ_ν; on suppose que $f(x)$ tend vers zéro en variant toujours dans le même sens quand $x \to \infty$.

Si l'on peut trouver un système d'intervalles tel que $\sum U_\nu \delta_\nu$ et $\sum L_\nu \delta_\nu$ *sont convergents pour* $\alpha > 0$ *et tendent, lorsque* α *tend vers zéro, vers la même limite* A, *alors* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *a la valeur* A.

La réciproque est vraie. Le système d'intervalles le plus simple est $0, h, 2h, \ldots$, dépendant du paramètre h. Suivent d'autres théorèmes du même genre et des applications.

Jourdain (*Philip-E.-B.*). — Addition to papers on the equations of mechanics. [Additions à des Mémoires sur les équations de la Mécanique.] (241-250).

Corrections à quelques formules du Mémoire du *Quarterly Journal* (vol XXXVI, 1905, p. 284 296), et remarques sur celles du Mémoire du même Recueil (vol. XXXV, 1904, p. 61-79).

Basset (*A.-B.*). — Birational transformation of surfaces. [Transformation birationnelle des surfaces.] (250-262).

Emploi de la transformation quadratique pour analyser les points constituants des différentes espèces de singularités sur une surface. L'auteur montre les analogies entre cette théorie et la théorie analogue pour les courbes, et il étudie les particularités qui se présentent lorsque le cône tangent en un point singulier présente lui-même des génératrires singulières. Un point multiple d'ordre p sur une surface correspond à une courbe de degré p sur la surface transformée, une génératrice multiple sur le cône tangent au point multiple correspond à un point multiple sur la courbe, etc.

Young (*W.-H.*). — Note on left und right handed semi continuous functions [Note sur les fonctions semi-continues à droite et à gauche.] (263-265).

Toute fonction semi-continue à droite ou à gauche appartient à la première classe de Baire.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — On elliptic-function expansions in

which the coefficients are powers of the complex numbers having n as norm. [Sur les développements de fonctions elliptiques dans lesquels les coefficients sont des puissances des nombres complexes ayant n comme norme.] (266-299).

Par exemple :

$$k^2k'^2\rho^5 = 16\sum_1^\infty \chi_4(n)q^n,$$

$$(4k^2k'^2 + k^4k'^4)\rho^9 = 64\sum_1^\infty \chi_8(n)q^n,$$

où

$$\chi_4(n) = \frac{1}{4}\sum t^4 \quad \text{et} \quad \chi_8(n) = \frac{1}{4}\sum t^8,$$

les sommes étant étendues à tous les entiers complexes t qui ont n pour norme; formules annoncées dans des Mémoires précédents (*Quarterly Journal*, vol. XXXVIII, p. 33 et 300) et démontrées ici. D'une façon générale la première Partie du Mémoire traite des séries entières en q, où les coefficients sont de la forme $\sum t^e$.

La seconde Partie traite des fonctions $\lambda(m)$, $P(m)$, $Q(m)$, $\Omega(m)$ définies dans des Mémoires précédents comme coefficients des développements respectivement de

$$\frac{1}{16}k^2k'^2\rho^3, \quad \frac{1}{16}k^2k'\rho^4, \quad \frac{1}{16}k^2k'^{\frac{3}{2}}\rho^5, \quad \frac{1}{16}k^2k'^2\rho^6.$$

On montre ici que

$$\begin{aligned}
\lambda(m) &= \frac{1}{8}\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}a && \text{si} \quad m = 4k+1,\\
&= 0 && \text{si} \quad m = 4k+3,\\
P(m) &= \frac{1}{24}\sum(3a^2 - b^2 - c^2 - d^2),\\
Q(m) &= \frac{1}{8}\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}a(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) && \text{si} \quad m = 4k+1,\\
&= \frac{1}{4}\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}bcd && \text{si} \quad m = 4k+3,\\
\Omega(m) &= \frac{1}{8}\sum(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2),
\end{aligned}$$

où le signe $\sum$ s'étend à toutes les représentations de m comme somme de quatre carrés $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, a étant impair et b, c, d pairs quand $m = 4k+1$, a étant pair et b, c, d impairs quand $m = 4k+3$, enfin $s = a + b + c + d$.

La troisième Partie contient des formules du même genre pour la fonction $\Theta(n)$ définie par

$$k^2k'^2\rho^8 = \sum_1^\infty \Theta(n)q^n.$$

Enfin dans la quatrième Partie, $\lambda(m)$, $P(m)$, etc., sont exprimés comme somme des puissances semblables de certains nombres complexes que l'auteur appelle *dérivés* des représentations de m en somme de quatre carrés. Soit $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, les dérivés sont les nombres $a + cb - c - cd$.

Jessop (*C.-M.*). — On collineations of space. [Sur les collinéations dans l'espace.] (301-315).

La transformation ponctuelle linéaire la plus générale revient à faire correspondre les pôles d'un même plan par rapport à deux quadriques fixes U et V, et les invariants de la transformation s'expriment au moyen des invariants des deux quadriques. L'auteur donne l'interprétation géométrique de l'annulation de ces invariants. Il examine spécialement les transformations linéaires de période 4 ou 3, et termine par la recherche des transformations qui laissent invariante une quadrique donnée.

Dickson (*L.-E.*). — On families of quadratic forms in a general field. [Sur les familles de formes quadratiques dans un domaine de rationalité.] (p. 316-333).

Ce travail traite de la réduction à une forme normale des familles de formes bilinéaires ou quadratiques à n variables $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$, par des transformations portant sur les paramètres λ, et sur les variables x qui entrent dans les formes, le champ de ces variables étant quelconque. L'auteur traite le cas de $n = 2$, puis celui de $n = 3$, $m = 2$. Le problème est particulièrement difficile lorsque la famille ne contient pas de formes binaires, ou lorsque les formes binaires sont toutes irréductibles. Ni l'un ni l'autre de ces cas ne se présente lorsque le champ des variables est celui de tous les nombres réels ou complexes, ou bien celui des nombres réels seulement. Dans le premier cas il y a 8 types de familles, dans le second il y en a 13.

Bassel (*A.-B.*). — Singular lines and curves on surfaces. [Droites et courbes singulières sur les surfaces.] (334-356).

Le sujet n'avait guère été étudié que pour les surfaces de degré ne dépassant pas 4, mais certaines particularités ne se révèlent que pour un degré supérieur à celui-là.

L'auteur étudie les droites de la surface qu'il appelle du *second ordre* situées sur la surface et telles que toute section plane de la surface possède un point singulier du second ordre au point où le plan coupe la droite. Et d'ailleurs on appelle point singulier du second ordre sur une courbe plane, le point obtenu par la réunion de plusieurs points singuliers se déplaçant le long de la courbe. Les propriétés de ces droites sont différentes suivant que le plan tangent en un point de cette droite varie ou non quand ce point se déplace.

L'article se termine par ce théorème : « Si une surface du quatrième degré possède une cubique gauche de rebroussement, elle est développable, la cubique étant son arête de rebroussement. »

Hardy (*G.-H.*). — Some multiple integrals. [Quelques intégrales multiples.] (357-375).

Ce sont des intégrales contenant les fonctions de Bessel sous le signe d'intégration. Incidemment l'auteur est conduit à l'évaluation de certaines intégrales simples. Voici un exemple de ces formules : en posant

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} t^\alpha \, dt,$$

on a

$$\int_0^\infty \psi_\alpha(ax)\psi_\beta(bx)x^\nu \, dx$$
$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(1 + \frac{\alpha+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\beta+\nu}{2}\right)\int_0^\infty \frac{x^\nu \, dx}{(1+a^2x^2)^{1+\frac{\alpha+\nu}{2}}(1+b^2x^2)^{1+\frac{\beta+\nu}{2}}},$$

pourvu que $\nu > -1$ et $\alpha + \beta + \nu > -3$.

Jourdain (*Philip-E.-B.*). — On infinite sums and products of cardinal numbers. [Sur les sommes et produits infinis de nombres cardinaux.] (375-384).

L'auteur démontre (dans des conditions plus générales) la relation donnée par M. König [*Verh. d. 3. Internation. Kongress in Heidelberg in* 1904 (1905), p. 144]

$$\prod_\gamma \mathfrak{m}_\gamma > \sum_\gamma \mathfrak{m}_\gamma,$$

puis le théorème de Cantor (*Jahresber. d. deutsh. Math. Vereing.*, Band. 1, 1892, p. 75)

$$b^a > a,$$

sans faire appel à l'axiome de multiplication, et enfin

$$\aleph_{\chi+\zeta}^{\aleph_\xi} > \aleph_{\chi+\xi},$$

ζ étant un nombre limite, ξ un nombre cardinal tel que $\aleph_\xi$ soit le nombre cardinal d'un ensemble pouvant être bien ordonné en une série du type ζ, et χ un nombre ordinal.

E. Cahen.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Série III, Tome XXVI, 1909 [1].

Picard (*Émile*). — Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre, relative à une surface fermée, correspondant à un équilibre calorifique (9-17).

L'équation considérée est

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-F\frac{\partial V}{\partial u} + E\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = c(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,V,$$

où

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

est le carré de l'elément linéaire d'une surface fermée. En introduisant des solutions de l'équation (1) n'ayant qu'un point singulier, correspondant à une source de chaleur, et en multipliant le second membre par un paramètre λ, M. Picard ramène à une équation de Fredholm homogène le problème de la recherche d'une solution de (1) continue sur toute la surface; si c est positif (cas le plus important en Physique), il y a une infinité de valeurs de λ telles qu'il existe une telle solution continue non nulle identiquement : cela résulte de propositions classiques; si c n'est pas partout positif, la conclusion subsiste, comme M. Sanielevici l'établira dans le Mémoire ci-après. M. Picard donne ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des intégrales n'ayant d'autres singularités sur la surface que a sources données. Enfin ces résultats sont appliqués à la sphère, en introduisant les fonctions Y_n de Laplace, et au tore; ce dernier cas serait intéressant à approfondir davantage.

Sanielevici (*S.*). — Sur les équations différentielles des cordes et des membranes vibrantes (19-91).

Ce Mémoire débute par l'étude de l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0.$$

L'auteur traite divers problèmes relatifs à des conditions aux limites qui se rencontrent en Physique; on se donne aux deux extrémités d'un intervalle (a, b) soit les valeurs de y, soit celles de certaines combinaisons linéaires de y et $\frac{dy}{dx}$. M. Sanielevici ramène ces problèmes à certaines équations de Fredholm; mais son originalité consiste surtout à ne faire aucune hypothèse sur le signe

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIII, 1909, p. 152-165.

de A, sinon que ce signe change seulement un nombre fini de fois entre a et b : il parvient à démontrer que l'équation de Fredholm correspondante a dans ces conditions une infinité de valeurs caractéristiques. Si A est périodique, il y a également une infinité de valeurs de λ pour lesquelles (1) admet des intégrales périodiques.

M. Sanielevici traite ensuite l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda A u = 0,$$

relativement à laquelle il considère des problèmes analogues : u devant être défini et continu, ainsi que certaines de ses dérivées, à l'intérieur d'un certain contour, on peut se donner sur le contour les valeurs de u ou celles de certaines combinaisons linéaires de u et de sa dérivée $\frac{du}{dn}$ suivant la normale intérieure. Là encore, on rencontre, quel que soit le signe de A, une équation de Fredholm avec une infinité de valeurs caractéristiques. Cette conclusion s'étend à l'équation considérée par M. Picard dans le Mémoire ci-dessus.

Cartan (*E.*). — Les groupes de transformations continus, infinis, simples (93-161).

La détermination complète des groupes infinis simples présentait des difficultés qui ne se présentaient pas dans celles des groupes finis simples, difficultés dues surtout à l'absence d'une théorie précise sur la structure des groupes infinis. M. Cartan détermine tous les groupes infinis primitifs à n variables, ce qui fait connaître les structures de tous les groupes infinis transitifs simples; ces groupes se partagent en six grandes classes :

1° *Le groupe de toutes les transformations à n variables;*

2° *Le groupe des transformations à n variables qui laissent invariants les volumes;*

3° *Le groupe des transformations à n variables qui reproduisent les volumes à un facteur constant près;*

4° *Le groupe des transformations à $n > 4$ variables (n pair) qui laissent invariante l'intégrale double*

$$\iint dx_1 dx_2 + \ldots + dx_{n-1} dx_n;$$

5° *Le groupe des transformations à $n \geq 4$ variables (n pair) qui reproduisent l'intégrale double précédente à un facteur constant près;*

6° *Le groupe de toutes les transformations de contact dans l'espace à $\frac{n+1}{2}$ dimensions (n impair), considéré comme groupe de transformations ponctuelles à n variables ($n \geq 3$)*

Parmi ces groupes, ceux des classes 1°, 2°, 4°, 6° sont simples. Restent les groupes infinis simples qui ne sont isomorphes à aucun groupe transitif; il y en a deux catégories :

1° *Les groupes simples proprement dits : on les obtient en prenant un*

groupe simple transitif (fini ou infini) et en faisant dépendre de la manière la plus générale possible les éléments arbitraires de p variables invariantes par le groupe;

2° *Les groupes simples improprement dits; chacun d'eux est isomorphe à un groupe dont les équations ont la forme suivante :*

$$x'_1 = x_1,\ x'_2 = x_2,\ \ldots,\ x'_{n-1} = x_{n-1},\ x'_n = x_n + f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

en désignant par f la solution la plus générale d'un certain système d'équations aux dérivées partielles linéaire et homogène, à coefficients fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Ces résultats, rapprochés de ceux de M. Vessiot, conduisent à une proposition importante sur l'intégration des systèmes différentiels.

Traynard. — Polygones et courbes de fréquence (163-192).

Ce travail a pour objet de « mettre à la portée du lecteur français les Mémoires importants du professeur Pearson » renfermant les principaux résultats à connaître pour pouvoir appliquer aux sciences naturelles les méthodes de la statistique et du calcul des probabilités. M. Traynard a complété ou rectifié sur certains points les résultats de ces Mémoires; il ne donne aucun exemple numérique, mais on peut en trouver dans le Mémoire anglais plusieurs sur la Zoologie, la Botanique, la Médecine, la Météorologie.

Dans un premier Chapitre sont définis le polygone de fréquence et la courbe normale; celle-ci représente seulement une première approximation : des courbes générales de fréquence sont définies dans le second Chapitre; enfin, un troisième Chapitre traite de la représentation d'un polygone normal par une courbe : les types de courbes introduits paraissent satisfaire à tous les usages.

Rémy (L.). — Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre 3 (193-258).

Ce Mémoire traite des surfaces algébriques dont les points correspondent aux couples de points d'une courbe C non singulière de genre 3. Il est divisé en deux parties, dont la première traite du cas où un seul couple de points de la courbe correspond à un point de la surface, et la seconde du cas où deux couples de points de la courbe correspondent à un point de la surface; dans chacune des deux parties, le cas hyperelliptique est traité séparément du cas général. L'Auteur étudie, dans chacun de ces cas, le nombre des intégrales doubles de première ou de deuxième espèce, le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce attachées à la surface; il détermine les invariants $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ de M. Nöther et étudie les courbes algébriques tracées sur la surface.

Pour cette étude, M. Rémy fait surtout usage d'une représentation paramétrique due à M. Humbert : les coordonnées d'un point de la surface sont des fonctions abéliennes sextuplement périodiques de trois arguments u, v, w, liés par la relation

$$\mathfrak{Z}(u, v, w) = 0,$$

où $\mathfrak{Z}$ est la fonction théta normale du premier ordre et de caractéristique nulle. Citons quelques-uns des énoncés obtenus :

Toute courbe algébrique tracée sur la surface peut être représentée par une équation de la forme

$$(1) \qquad \Theta(u, v, w) = 0,$$

Θ *étant finie et satisfaisant aux équations fonctionnelles d'une fonction thèta pourvu que* $\mathfrak{Z} = 0$. Mais on ne peut pas toujours éviter que l'équation (1) ne représente, en même temps que la courbe donnée, une autre courbe, que M. Rémy détermine.

L'invariant relatif ρ *est égal à* 2 *pour les surfaces dont les points admettent une correspondance univoque, sans point fondamental ni courbe exceptionnelle, avec les couples de point d'une courbe algébrique non singulière et non unicursale.*

De là se conclut que *l'invariant* ρ_0 *de M. Picard est égal à* 14 *pour les surfaces considérées dans ce Mémoire.*

Rémy (*L.*). — Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce d'une classe de surfaces algébriques (259-274).

Dans ce nouveau Mémoire, M. Rémy étend d'abord à toutes les surfaces qui correspondent aux couples de points d'une courbe algébrique non singulière la méthode qui lui a permis, dans le Mémoire précédent, de déterminer l'invariant ρ_0 dans le cas où la courbe est de genre *trois*. Il trouve

$$\rho_0 = 2p^2 - p - 1$$

p étant le genre de la courbe.

Ensuite est considéré le cas des surfaces dont les coordonnées d'un point sont des fonctions *non symétriques* des coordonnées de deux points d'une courbe algébrique : l'invariant relatif ρ est maintenant égal à *trois*, pourvu que la correspondance soit univoque et sans courbe exceptionnelle, et que la courbe algébrique ne soit ni singulière ni unicursale. Quant à l'invariant absolu ρ_0, on trouve maintenant

$$\rho_0 = 4p^2 - 1.$$

L'hypothèse que la courbe algébrique n'est pas singulière est essentielle : M. Rémy le montre sur le cas particulier des surfaces de Kummer.

Stekloff (*W.*). — Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton (*suite*) (275-336).

Le commencement de ce Mémoire a été publié dans le même Recueil en 1908 (*voir* l'Analyse dans l'année 1909 de ce *Bulletin*). Continuant son étude, M. Stekloff considère le cas où la grandeur des axes de l'ellipsoïde fluide ne

change pas pendant le mouvement; son analyse lui permet de signaler l'inexactitude d'une proposition de Riemann relative à ce sujet. Il examine ensuite le cas où le mouvement d'entraînement se réduit à la rotation de l'ellipsoïde autour d'un de ses axes principaux, et démontre que la seule circonstance où cela arrive est celle qu'a considérée Riemann. M. Stekloff cherche encore tous les cas où la direction des axes de l'ellipsoïde ne varie pas avec le temps, et trouve que les seuls cas possibles sont ceux de Kirchhoff et de Dirichlet. Enfin le travail se termine par quelques « remarques générales sur l'intégration des équations du mouvement ». L'auteur indique certaines intégrales dont la connaissance permet de ramener le problème à des quadratures en nombre déterminé.

Zaremba (*S.*). — Le problème biharmonique restreint (337-404).

L'auteur entend par problème biharmonique celui qui consiste à trouver une fonction w, satisfaisant dans un domaine (D) à l'équation

$$\Delta^2 w = 0,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, et telle que sur la frontière (S) de (D), w et $\frac{dw}{dn}$ prennent des valeurs données, n étant la normale à (S).

Le problème biharmonique *restreint* est celui où les *conditions aux limites* imposées à w sont satisfaites par une fonction φ donnée à l'avance et satisfaisant à certaines conditions de régularité.

L'auteur montre que ce problème se ramène à celui-ci : une fonction ψ étant donnée, trouver une fonction v telle que, pour toute fonction h harmonique dans (D), on ait

$$\int_{(D)} \psi h d\tau = \int_{(D)} v h d\tau;$$

la fonction donnée ψ et la fonction cherchée v, ainsi que h, sont assujetties seulement à certaines conditions de régularité.

Enfin ce dernier problème est effectivement résolu par M. Zaremba.

Vessiot (*E.*). — Essai sur la propagation par ondes (405-448).

M. Vessiot s'occupe de la propagation par ondes dans un milieu à n dimensions « dont la nature varie avec le temps. Le problème est traité à un point de vue purement cinématique. Le milieu est défini par le système des ondes élémentaires qui ont pour origines, à chaque instant, les divers points du milieu. La loi de propagation est le principe des ondes enveloppes; mais nous supposons seulement qu'il ait lieu pour un intervalle de temps infinitésimal, et aux infiniment petits près d'ordre supérieur. Un des résultats obtenus est que le principe est alors rigoureusement vrai, dans tout intervalle de temps ».

Les considérations de M. Vessiot le conduisent à une théorie nouvelle et intuitive de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Enfin M. Vessiot ramène la recherche des trajectoires des points du milieu à une question de calcul des variations; dans cette dernière question, il démontre que les extrémales donnent effectivement le minimum : sa méthode, nouvelle,

est équivalente à celles de Weierstrass et de M. Hilbert, et elle est susceptible d'extension.

Darboux (*Gaston*). — Sur certains systèmes d'équations différentielles linéaires (449-471).

Les systèmes considérés tout d'abord ici sont de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les conditions

$$p_{i,i} = 0, \qquad p_{i,k} + p_{k,i} = 0.$$

Toute solution du système satisfait à la relation

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{const.};$$

on reconnait là une généralisation d'un système rencontré dans la théorie du mouvement relatif. M. Darboux, à la suite d'autres auteurs, montre d'abord que pour $n = 4$ l'intégration du système peut se ramener à celle de deux équations de Riccati; sa méthode repose sur la considération des intégrales pour lesquelles $\sum x_i^2 = 0$. Puis il indique comment sa méthode s'étend au cas de n quelconque, en considérant séparément le cas où n est pair et celui où n est impair.

Tout système linéaire homogène admet ce que M. Darboux appelle un *système adjoint*, et l'ensemble de ces deux systèmes, considéré comme formant un système unique, est du type qui vient d'être considéré. M. Darboux étend considérablement cette notion de système adjoint en considérant les déterminants d'ordre p formés à l'aide du tableau des valeurs des inconnues dans p solutions particulières du système; ces déterminants, qui sont liés par un grand nombre de relations, satisfont à des systèmes d'équations linéaires qui généralisent le système adjoint. Ces systèmes peuvent se ramener à d'autres qui généralisent l'équation de Riccati.

Liapounoff (*A.*). — Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation (473-483).

On sait qu'une masse liquide homogène, soustraite à toute action extérieure et dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton, admet certaines *figures d'équilibre* pour lesquelles le mouvement de la masse se réduit à une rotation autour d'un axe fixe. Certaines de ces figures d'équilibre sont des ellipsoïdes de revolution aplatis ou des ellipsoïdes à trois axes inégaux. M. Liapounoff a étudié dans d'autres Mémoires la question de trouver des figures d'équilibre non ellipsoïdales, mais formant des ensembles continus d'où l'on puisse passer d'une façon continue aux figures ellipsoïdales. M. Liapounoff montre ici qu'il n'y a pas d'autres telles séries de figures non ellipsoïdales que celles qu'il a découvertes dans ses précédents travaux.

Zoretti (*Ludovic*). — La notion de ligne (485-497).

Dans ce travail sont étudiés « brièvement les rapports qui existent entre les deux définitions de la *ligne* que nous devons à M. Cantor et à M. Jordan ». M. Schœnflies a publié de nombreux travaux sur ce sujet; le Mémoire de M. Zoretti ne contient pas de résultats plus précis que ceux de M. Schœnflies, mais l'intérêt de ce Mémoire réside dans sa manière propre de poser la question et d'énoncer les résultats. Sa méthode fait bien moins que celle de M. Schœnflies appel à la Géométrie.

Minkowski (*Hermann*). — Espace et temps; conférence faite à la 80e réunion des naturalistes et médecins allemands à Cologne, le 21 septembre 1908, publiée par les soins de M. A. Gutzmer, traduite par MM. A. Hennequin et J. Marty (499-517).

Cette conférence traite le sujet de la Mécanique de la relativité, où les notions d'espace et de temps ne sont plus distinctes. Les lecteurs de ce *Bulletin* ont pu lire récemment (t. XL, 1916, p. 94-104) sur ce sujet une étude de M. Vergne.

Böttcher (*Lucien*). — Nouvelle méthode d'intégration d'un système de n équations fonctionnelles linéaires du premier ordre de la forme

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij}(z) U_j f(z)$$

(519-543).

La méthode de M. Böttcher repose sur la connaissance d'une solution particulière quelconque de l'équation fonctionnelle

$$B[f(z)] = hB(z),$$

dans laquelle h est une constante, arbitraire sous la condition

$$|h| < 1.$$

A l'aide de cette fonction B sont formées des séries; les fonctions U_i cherchées sont représentées chacune par un quotient de deux telles séries. L'Auteur trouve ainsi n solutions indépendantes au système donné. Quelques indications sur les zéros et sur les singularités des fonctions trouvées terminent le Mémoire.

Tome XXVII, 1910.

Boussinesq (*J.*). — Sur une importante simplification de la théorie des ondes que produisent, à la surface d'un liquide,

l'émersion d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent (9-42).

Ce Mémoire a pour but la simplification des méthodes données vers 1815 par Cauchy et Poisson pour exprimer, au moyen de séries convergentes, en fonctions des coordonnées x, y, z et du temps t, le potentiel φ des vitesses et la dénivellation h, dans le problème des ondes infiniment petites produites dans un bassin indéfini latéralement comme en profondeur, par l'émersion d'un solide suivant une surface infiniment petite, ou par une impulsion superficielle suivant une surface également infiniment petite. M. Vergne, dans sa Thèse, ayant déjà notablement simplifié les démonstrations de Cauchy et de Poisson, M. Boussinesq simplifie encore la démonstration de M. Vergne, en l'étendant au cas d'un bassin limité quelconque. Il résulte encore de ce Mémoire que les formules de Poisson et de Cauchy peuvent elles-mêmes, dans certains cas, s'étendre à des bassins indéfinis en profondeur, mais limités latéralement par des parois verticales; par exemple dans le cas où le bassin affecte la forme d'un prisme à base rectangulaire, ou triangulaire équilatérale, ou hexagonale régulière.

Fatou (*P.*). — Sur une classe remarquable de séries de Taylor (43-53).

Soit $\theta(u)$ une fonction, holomorphe à l'intérieur d'un cercle Γ de centre α, et telle que pour tout point u intérieur à Γ, on ait

$$|\theta(u) - \alpha| < K|u - \alpha| \qquad (\theta < K < 1).$$

Soient encore

$$\theta_1(u) = \theta(u), \qquad \theta_n(u) = \theta[\theta_{n-1}(u)],$$
$$a = \theta'(\alpha).$$

Considérons la série entière en z

$$f(z) = u + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \theta_n(u)$$

M. Fatou démontre que cette série représente une fonction méromorphe de z qui est le quotient de deux fonctions entières de genre zéro, la fonction dénominateur étant

$$(1 - z)(1 - az)(1 - a^2 z)\ldots(1 - a^n z)\ldots,$$

M. Fatou obtient même quelques indications supplémentaires sur les fonctions entières introduites, et donne une généralisation de cette proposition.

Poincaré (*H.*). — Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques (55-108).

MM. Enriques, Castelnuovo et Severi ont démontré que le nombre des intégrales de différentielle totale de première espèce d'une surface algébrique

dépend des systèmes continus algébriques, non linéaires, de courbes algébriques qu'on peut tracer sur la surface. M. Poincaré retrouve ce théorème par une voie purement transcendante. Il introduit des valeurs de y qu'il nomme *critiques*. Soit p le genre de la section de la surface par les plans $y =$ const. et considérons les intégrales abéliennes de premières espèce

$$u_i = \int \frac{R_i\,dx}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où R est une fonction rationnelle de x, y, z : les valeurs critiques de première espèce de y sont, par définition, celles pour lesquelles il existe des constantes λ_i telles que

$$\Sigma \lambda_i R_i = 0;$$

ce sont ces valeurs critiques qui jouent le principal rôle dans ce Mémoire. Leur nombre est étroitement lié à la différence entre p et le nombre des surfaces d'ordre $n - 3$ qui passent par les courbes doubles de la surface donnée d'ordre n.

Cartan (*E.*) — Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre (109-192).

Les systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes jouissent de la propriété que leurs surfaces intégrales sont engendrées par des multiplicités caractéristiques du second ordre dépendant de cinq constantes arbitraires. Ces caractéristiques doivent être associées de façon que leurs cinq paramètres satisfassent à un certain système de trois équations aux différentielles totales (équations de Pfaff). M. Cartan dit que deux systèmes en involution sont équivalents si l'on peut, par un changement de variables, passer du système de Pfaff correspondant à l'un au système de Pfaff correspondant à l'autre : il faut et il suffit pour cela qu'on puisse passer de l'un à l'autre des systèmes donnés par une transformation de contact.

Si l'on considère une équation aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques confondues dépendant de constantes arbitraires, on est conduit encore à introduire un système non intégrable de *deux* équations de Pfaff à cinq variables.

M. Cartan, dans ce Mémoire, forme les invariants des systèmes de deux et de trois équations de Pfaff à cinq variables par rapport au groupe général des transformations à cinq variables. Puis il applique les résultats obtenus aux systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, ainsi qu'aux équations à caractéristiques confondues, dont on vient de parler. Il arrive à déterminer la structure du groupe des transformations de contact qui ne changent pas un système en involution donné, et donne ainsi une classification de ces systèmes. En dehors de certains cas, qu'il précise, les caractéristiques s'obtiennent par des quadratures et, au plus, une équation de Riccati, et l'on a des renseignements sur les opérations à faire pour les associer. M. Cartan obtient des résultats analogues pour les équations à caractéristiques confondues dont il a été question.

Fréchet (*Maurice*). — Sur les fonctionnelles continues (193-216).

M. Fréchet étudie dans ce Mémoire une méthode de représentation des fonctionnelles continues par des séries d'intégrales multiples. Il obtient d'abord ce résultat que toute fonctionnelle continue U_f de la fonction f de x continue elle-même dans l'intervalle $(0, \pi)$ est représentable sous la forme

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} U_f = \lim_{n=\infty} \Bigg[& u_n^{(0)} + \int_0^\pi u_n^{(1)}(x_1) f(x_1)\, dx_1 + \int_0^\pi \int_0^\pi u_n^{(2)}(x_1, x_2) f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 + \ldots \\ & + \int_0^\pi \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi u_n^{(r_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n}) f(x_{r_n}) \ldots f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{r_n} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

où les $u_n^{(p)}$ sont des fonctions continues, ou même, si l'on veut, des polynomes, qui sont déterminées par la fonctionnelle U indépendamment de la fonction $f(x)$. Il étudie ensuite la nature de la convergence de ce développement dans certains ensembles, nommés *compacts*, de fonctions f, et prouve que cette convergence est uniforme.

Ce développement (A) peut être établi de plusieurs façons pour une fonctionnelle donnée, de même qu'une fonction continue peut être développée de diverses façons en série de polynomes. M. Fréchet définit une classe particulière de fonctionnelles, dites d'*ordre entier*, pour lesquelles on peut énoncer un résultat plus précis. Enfin il s'élève à la notion de *fonctionnelles analytiques*, comparables aux fonctions holomorphes d'une variable complexe, et dont un certain développement, cas particulier de (A), est unique.

Diverses propriétés, que nous n'avons pu indiquer ici, et qui étendent aux fonctionnelles des propriétés des fonctions, sont en outre données dans ce travail,

Rados (*Gustave*). — Sur une théorie des congruences à plusieurs variables (217-231).

Considérons la congruence

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_i^{(k)} x^{m-i} y^{n-k} \equiv 0 \qquad (\bmod p),$$

p étant premier. M. Rados donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle admette une solution où ni x, ni y ne soient divisibles par p; puis une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle admette une solution quelconque. Pour obtenir la première condition, il ramène m et n à être égaux à $p-2$, au moyen du théorème de Fermat : la condition est alors qu'un certain déterminant à $(p-1)^2$ lignes soit nul. Pour obtenir la seconde condition, il ramène m et n à la valeur $p-1$, et la condition est qu'un certain déterminant à p^2 lignes soit nul. M. Rados énonce encore deux propositions donnant, au moyen du *rang* de ces déterminations, le nombre des solutions différentes de l'espèce considérée, mais il renvoie pour les démonstrations à des travaux parus ailleurs.

Bernstein (*Serge*). — Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale (233-256).

Ce Mémoire contient des applications de résultats généraux démontrés par l'auteur dans un Mémoire *Sur la généralisation du problème de Dirichlet* paru dans les *Mathematische Annalen*, 1910; étant donnée une équation analytique elliptique

$$(1) \qquad F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0 \qquad [4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0],$$

le problème de Dirichlet consiste à en déterminer une solution analytique à l'intérieur d'un contour C et prenant des valeurs données sur le contour C.

Après avoir rappelé les conditions nécessaires et suffisantes qu'il a obtenues, M. Bernstein les applique d'abord aux équations

$$(2) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

$$(3) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = z(1+p^2+q^2),$$

$$(4) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 1+p^2+q^2,$$

$$(5) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = k(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour les équations (2), (3) et (4) le problème de Dirichlet est toujours possible et même *régulièrement* : c'est-à-dire que, si la suite des valeurs données sur le contour est analytique, les dérivées des deux premiers ordres de la fonction inconnue sont bornées même sur le contour. Pour l'équation (2), le problème de Dirichlet se confond avec le problème de Plateau. Pour l'équation (5), au contraire (surfaces à courbure moyenne constante), le problème est, suivant les cas, possible régulièrement ou non, ou impossible.

M. Bernstein considère ensuite les équations

$$(6) \qquad rt - s^2 = k^2,$$

$$(7) \qquad rt - s^2 = k^2(1+p^2+q^2).$$

Pour la première, le probleme de Dirichlet est toujours possible et admet *deux* solutions; pour la seconde, il est possible avec deux solutions *si k^2 est assez petit*. Si k^2 tend vers zéro, les surfaces solutions de cette dernière équation tendent vers des surfaces irrégulières applicables sur le plan.

Haag (*J.*). — Familles de Lamé composées de surfaces égales. Généralisations. Applications (257-337).

Extrait de l'Introduction. — Mon travail se divise en quatre Chapitres :

Dans le premier, je m'occupe des *familles de Lamé composées de surfaces égales*. Je n'y établis guère de résultats essentiellement nouveaux. Néanmoins, la méthode que j'ai employée m'a paru digne d'être exposée parce qu'elle permet d'obtenir très rapidement tous les résultats connus jusqu'à présent et, en outre, parce qu'elle donne le moyen de déterminer, d'une façon commode, les systèmes triples orthogonaux dont elle démontre l'existence.

Le second Chapitre est une généralisation du précédent. Je me propose d'y déterminer toutes les familles de Lamé dont *les différentes surfaces ont des*

représentations sphériques égales. Je suis arrivé à des résultats d'une forme assez élégante, qui permettent d'aborder, par une nouvelle voie, le problème qui fait l'objet du premier Chapitre.

Dans le troisième Chapitre, je me pose la question suivante : *Peut-on trouver deux familles de Lamé composées de surfaces deux à deux égales, mais placées dans des positions relatives différentes?* Cette question est intimement liée à celle des familles de Lamé composées de surfaces égales et peut donner naissance à d'intéressantes applications. C'est ainsi, par exemple, qu'elle m'a permis de déterminer *toutes les familles de Lamé composées d'hélicoïdes*, ainsi que *celles dont les différentes surfaces admettent chacune un plan de symétrie*, variable d'une surface à la suivante.

Enfin, le dernier Chapitre généralise le troisième, comme le second généralise le premier, c'est-à-dire que je me pose encore la question précédente, mais en supposant simplement que ce sont *les représentations sphériques qui, deux à deux, sont égales*.

J'aurais voulu développer, dans un cinquième Chapitre, l'application à différents cas particuliers très intéressants des théories exposées dans les quatre autres. Mais j'ai dû me borner, pour ne pas allonger outre mesure ce travail, à indiquer sommairement les résultats obtenus et ceux que j'espère obtenir.

Bachelier (*L.*). — Les probabilités à plusieurs variables (339-360).

M. Bachelier introduit dans le calcul des probabilités des variables continues : supposant que le calcul s'applique à un jeu où n joueurs jouent μ parties, il admet que μ et les pertes de n joueurs sont des variables continues; il appelle cela le calcul des probabilités à $n-1$ variables, variables qui sont les pertes de $n-1$ des joueurs. Il a ainsi l'avantage de pouvoir utiliser dans son calcul des équations ordinaires aux dérivées partielles. Il admet ici que ses joueurs ont chacun une fortune infinie. Représentant par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les pertes des joueurs entre les parties μ et μ_1, et par $f(\mu, \mu_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ la probabilité pour que ces pertes aient les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, l'auteur trouve que f satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} &f(\mu_0, \mu, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_0, \mu_1, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \\ &\qquad \times f(\mu_1, \mu, x_1 - X_1, x_2 - X_2, \ldots, x_{n-1} - X_{n-1})\, dX_1\, dX_2 \ldots dX_{n-1} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\mu - \mu_1 = 0} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{-\beta_1}^{\beta_2}\cdots\int_{-\gamma_1}^{\gamma_2} f(\mu_1, \mu, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1} = 1.$$

Si l'on introduit la *fonction d'instabilité* $\varphi_i(\mu)$ relative au joueur A_i pour l'ensemble de μ parties, c'est-à-dire le double de la valeur moyenne du carré de la perte de A_i dans un jeu équitable, et si l'on introduit encore les valeurs moyennes $\psi_{ij}(\mu)$: 2 des $x_i x_j$ dans les mêmes conditions, on trouve que les

relations précédentes entrainent

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i'\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\chi_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial \mu},$$

d'où M. Bachelier tire diverses conséquences, notamment pour la théorie des épreuves répétées, et pour celle des probabilités mêlées. Le cas du jeu non équitable est aussi envisagé.

Lebesgue (*Henri*). — Sur l'intégration des fonctions discontinues (361-450).

M. Lebesgue s'occupe principalement ici de la dérivation des intégrales multiples. Il rappelle les notions relatives aux ensembles mesurables et aux intégrales définies, puis il introduit la notion d'intégrale indéfinie comme fonction d'ensemble, et indique que, pour des *familles régulières d'ensemble*, la dérivation est presque en tout point l'opération inverse de l'intégration : il nomme dérivée en P de sa fonction d'ensemble $\mathcal{F}(E)$ la limite de $\mathcal{F}(E) : m(E)$, E étant un ensemble contenant P et dont toutes les dimensions tendent vers zéro. Il envisage aussi une autre notion d'intégrale indéfinie comprise dans la première, due à M. Vitali, à propos de laquelle s'introduit la notion de *fonction absolument continue*, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit une intégrale indéfinie. M. Lebesgue considère ensuite la dérivation des fonctions à variation bornée, puis la dérivation partielle des intégrales indéfinies; il arrive à cette conclusion que, *si l'on fait abstraction d'un ensemble de mesure nulle convenablement choisi, l'intégrale* $\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *d'une fonction sommable f admet sur l'ensemble restant* E *une différentielle totale première permettant de calculer les nouvelles dérivées premières de* $\mathcal{F}$ *après un changement de variables quelconque*. Enfin, dans un dernier paragraphe, sont réunies diverses formules, relatives les unes au calcul approché des intégrales, notamment à une remarquable généralisation du second théorème de la moyenne, les autres au calcul exact, notamment à l'intégration par parties et au changement de variables.

Clairin (*J.*). — Sur les transformations d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre (451-489).

Considérons l'équation

$$(\varepsilon)\qquad r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0$$

et supposons qu'elle admette un groupe continu (G) de transformations de contact d'ordre pair $2n$. M. Clairin prolonge (G) en introduisant les dérivées de z jusqu'à l'ordre n, exprimées à l'aide de celles d'entre elles où ne figure au plus qu'une dérivation par rapport à x, et démontre que (ε) peut se ramener, par une transformation où figurent ces mêmes dérivées, à une équation de Monge-Ampère; on peut même s'arranger pour que celle-ci contienne linéairement les dérivées secondes. Admettant ensuite que (G) soit d'ordre impair $2n-1$, M. Clairin démontre qu'on peut faire correspondre à (ε) deux équations de

Monge-Ampère. Il peut pourtant, que (G) soit d'ordre pair ou impair, se présenter un cas exceptionnel où ces conclusions sont en défaut.

Dans une seconde Partie, M. Clairin étudie les propriétés des transformations qui viennent d'être définies. Il démontre notamment la possibilité de les remplacer dans certains cas par une suite de transformations plus simples.

Les transformations indiquées dans la première Partie sont encore impossibles si (ε) n'admet qu'une seule transformation infinitésimale de contact : M. Clairin montre qu'on peut alors parfois remplacer les transformations étudiées par une transformation de Bäcklund de deuxième espèce.

Boussinesq (*J.*). — Sur les principes de la Mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux (491-528).

Dans cette très intéressante étude philosophique sur les principes de la Mécanique, M. Boussinesq admet comme principes fondamentaux que dans un système de points matériels seuls dans l'espace : 1° l'accélération de chaque point ne dépend que de la configuration du système, nullement des vitesses de chaque point; 2° que ces points peuvent, pour une même configuration, recevoir toutes les vitesses possibles; 3° qu'il existe, pour chacun d'eux, un coefficient constant nommé *masse*, jouissant des propriétés bien connues, et notamment de celle de la conservation de l'énergie, par l'introduction de l'énergie actuelle, ou cinétique, et de l'énergie potentielle. Or certains faits, comme le mouvement d'un boulet éprouvant de la part de l'air une résistance fonction de la vitesse, semblent contredire ces lois. Mais M. Boussinesq montre que la contradiction peut n'être qu'apparente, et due aux approximations que notre intelligence, dans sa faiblesse, est obligée de faire dans l'étude des phénomènes; par exemple, on peut admettre que, dans le cas du boulet, pour chaque vitesse du boulet il tend à s'établir un régime permanent d'écoulement de l'air dans son voisinage; dès lors, si cette vitesse ne varie pas trop vite, ce régime sera toujours près d'être atteint, et par suite la configuration des particules d'air au voisinage du boulet ne dépendra, en première approximation, que de sa vitesse : d'où l'explication de la contradiction apparente. Nous ne suivrons pas M. Boussinesq dans l'étude des autres phénomènes qu'il étudie ici; il nous suffira de noter que ces explications ingénieuses et du reste fort plausibles lui permettent de rendre compte de phénomènes où la masse de certains corps paraît varier, dépendre de la grandeur et de la direction de la vitesse; et même où l'accélération d'un point du corps à chaque instant paraît dépendre de l'ensemble des états antérieurs de ce corps. Ces considérations sont appliquées aux planètes, dont la masse fictive est pratiquement égale à la masse vraie, et aux particules des rayons cathodiques, pour lesquelles il est loin d'en être de même.

Sainte-Laguë (*A.*). — La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés (529-542).

Soit à partager l'entier N proportionnellement aux nombres A, B, C, ... dont la somme est S; on trouve des valeurs exactes a, b, c, ..., que l'on rem-

place par des valeurs entières α, β, γ, ... L'auteur cherche à faire la répartition de manière que la somme

$$\Sigma A\left(\frac{\alpha}{A}-\frac{N}{S}\right)^2$$

soit minimum, et trouve qu'il suffit pour cela de remplacer les diviseurs 1, 2, 3, 4, ... de la méthode d'Hondt par la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, ... Cette méthode est ensuite comparée à celles qui ont été précédemment proposées par d'autres auteurs.

Vergne (*H.*). — Sur certaines propriétés des systèmes d'équations différentielles (543-563).

Ce Mémoire est consacré à l'étude des propriétés qu'ont certains systèmes d'équations différentielles, notamment des systèmes canoniques. M. Vergne rappelle d'abord certains résultats connus, relatifs par exemple aux changements canoniques de variables Il en tire des conséquences remarquables pour les systèmes canoniques : par exemple *une expression dépendant des intégrales du système et de leurs dérivées jusqu'à un ordre quelconque, et qui reste invariante par un changement canonique de variables, est une intégrale.* Ces résultats comprennent le théorème de Poisson et beaucoup d'autres, dus notamment à Poincaré. Ils permettent de retrouver les invariants intégraux de Poincaré.

Passant aux systèmes quelconques d'équations différentielles, M. Vergne démontre que la connaissance de certains invariants intégraux et d'un certain nombre d'intégrales permet d'obtenir des multiplicateurs du système. Ces résultats appliqués aux systèmes canoniques permettent de retrouver des propriétés déjà établies dans ce Mémoire.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Sur les continus irréductibles de M. Zoretti (565-566).

M. Brouwer relève certaines erreurs contenues dans l'article sur la *Notion de ligne* publié par M. Zoretti dans le même recueil, 3e série, t. XXV, p. 485-497.

Zoretti. — Remarque au sujet de la remarque de M. Brouwer (567).

M. Zoretti, auquel ces erreurs avaient déjà été signalées par M. Janiszewski, a déjà, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 151, 1910, p. 201), indiqué les rectifications que doivent subir ses énoncés. Il indique ici le point exact où se trouve l'erreur principale signalée par M. Brouwer.

Picard (*Émile*). — Sur une classe de fonctions fondamentales et sur certains développements en série (569-574).

M. Schmidt a ramené, dans son étude des *Mathematische Annalen*, t. LXIII, la possibilité du développement d'une fonction f suivant une certaine série de fonctions fondamentales à la possibilité de la résolution d'une équation intégrale de première espèce. M. Picard considère ici le cas simple où cette équation est du type d'Abel et de M. Volterra, et montre que, dans des cas étendus, la possibilité des développements de M. Schmidt est certaine. M. Picard signale comme particulièrement intéressant à étudier le cas où le noyau de cette équation est e^{-xy}, les limites étant un nombre *positif* a et $+\infty$: les fonctions fondamentales sont alors définies par les équations

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x e^{-xy} \psi(y)\, dy,$$

$$\psi(x) = \lambda \int_x^{+\infty} e^{-xy} \varphi(y)\, dy.$$

Georges Giraud.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tomo XVII, 1903 [1] (Ire Partie : *Memorie e Comunicazioni*).

Giulotto (*V.*). — Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre. (Sur une nouvelle extension des fonctions sphériques de Legendre.) (1-43.)

Parmi les formes ternaires d'ordre n qui vérifient l'équation $\Delta_2^q f = 0$, il en est une, X_n^q, qui ne dépend que d'une variable : l'auteur l'appelle *fonction de Legendre d'indice q et d'ordre n*. Les X_n^q sont des cas particuliers des fonctions de Gegenbauer. L'auteur leur étend les formules de Jacobi, Dirichlet, Mehler et Laplace ; il forme des équations différentielles qu'elles vérifient, ce qui le conduit à étendre aux X_n^q la notion de fonction sphérique de deuxième espèce : et il termine en calculant certaines intégrales définies où les X_n^q figurent au premier et au second degré.

Loria (*G.*). — Sui fondamenti della teoria projettiva delle curve algebriche sghembe. (Sur les fondements de la théorie projective des courbes algébriques gauches.) (44-64.)

L'auteur présente une exposition didactique élémentaire des propriétés fondamentales des courbes gauches ; il les définit comme étant le lieu d'un point dont les coordonnées homogènes ont pour expressions

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLI$_2$, p. 45-55.

les φ_i étant homogènes, et les t_j satisfaisant à une relation algébrique. Il étudie ainsi la tangente, le plan osculateur et son enveloppe, ainsi que certains entiers remarquables liés à la courbe.

Perna (*A.*). — Le equazioni delle curve in coordinate complesse coniugate. (Les équations des courbes en coordonnées complexes conjuguées.) (65-72.)

Posons $z = x + iy$, $z' = x - iy$, et soit $f(z, z') = 0$ l'équation d'une courbe plane; pour une courbe algébrique réelle, f est un polynome dont les coefficients doivent satisfaire diverses conditions qu'indique l'auteur.

Severi (*F.*). — Su alcune questioni di postulazione. (Sur quelques questions de postulation.) (73-103.)

Précédemment, M. Severi avait calculé le nombre des conditions imposées aux hypersurfaces *d'ordre l assez élevé* qu'on assujettit à contenir une variété, appartenant à un S_r et intersection complète de h hypersurfaces. L'auteur montre d'abord que, moyennant certaines conventions de langage, la restriction précédente peut être supprimée. Puis il étend le théorème du reste aux courbes et aux surfaces de S_r : ainsi, pour les premières, supposons que $r - 1$ hypersurfaces se coupent suivant deux courbes C et C'; par définition, toute hypersurface passant par C' sera une *adjointe* pour C; et l'auteur établit que toutes les adjointes à C, d'ordre donné et passant par un groupe de points donnés sur C, y découpent une série complète. Puis, à l'exemple de M. Enriques, il construit la série canonique en se servant des séries jacobiennes; et il termine en étudiant les systèmes adjoints des sections hyperplanes d'une hypersurface et de leurs multiples.

De Franchis (*M.*). — Sulle varietà ∞^2 delle copie di punti di due curve o di una curva algebrica. (Sur les variétés ∞^2 des couples de points de deux courbes ou d'une courbe algébrique.) (104-121.)

L'auteur détermine les invariants absolus p_g, p_n, $p^{(1)}$, et les invariants relatifs I et ω pour les variétés images des couples de points de deux courbes ou d'une même courbe. Chacun de ces cas exige une discussion spéciale, qui procède à la fois de la Géométrie et de l'Analyse.

Del Re (*A.*). — Sulla teoria degli assi-segmenti. (Sur la théorie des axes-segments.) (122-128.)

En s'appuyant sur ce fait que dans un mouvement hélicoïdal le travail d'un torseur est égal à celui de ses composantes, l'auteur parvient à simplifier la méthode par laquelle Ball avait établi les formules de transformation de la

théorie des vis. En outre, le procédé de l'auteur n'exige plus que les systèmes-vis de référence aient leurs six composantes respectivement parallèles.

Del Re (*A.*). — Sopra una superficie del quarto ordine. (Sur une surface du quatrième ordre.) (129-158.)

L'auteur approfondit l'étude de la surface pecténoïde

$$(x^2 + y^2 + z^2)\, z^2 - h^2 x^2 = 0,$$

qui avait été entreprise par Ball. Il en fait la représentation plane d'ordre minimum (par un système de cubiques); puis il énumère sur la surface dix droites imaginaires (dont six isotropes) et huit systèmes de coniques (dont deux sont des cercles).

Burgatti (*P.*). — Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine con n variabili independenti. (Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes.) (159-167.)

L'auteur traite successivement les problèmes suivants : reconnaître si une équation linéaire du second ordre à n variables peut être ramenée à une équation analogue à $n-1$ variables, et dans l'affirmative faire la réduction; reconnaître si l'intégration des équations linéaires de Dini (*Lincei*, 1896) peut être ramenée à l'intégration successive de deux équations du premier ordre.

Marletta (*G.*). — La trasformazione quadratica (2, 2) fra piani. [La transformation quadratique (2, 2) entre plans.] (173-184.)

L'auteur considère les deux plans comme immergés dans un S_4; et, par deux droites fixes de S_4, ainsi que par deux points correspondants pris sur les deux plans, il fait passer deux plans variables qui se coupent suivant une surface Ω, rationnelle, du sixième ordre, à sections hyperplanes elliptiques. Cette surface permet de définir géométriquement la correspondance; mais on peut aussi l'utiliser pour donner des constructions géométriques de la même correspondance sans sortir de chacun des deux plans.

Pascal (*E.*). — Su di una equazione differenziale di forma più generale di quella di Riccati, e sul rapporto anarmonico di quattro radici di una equazione algebrica a coefficienti variabili. (Sur une équation différentielle de forme plus générale que celle de Riccati, et sur le rapport anharmonique de quatre racines d'une équation algébrique à coefficients variables.) (185-190.)

Les intégrales de l'équation

$$y' = P_n y^n + \ldots + P_1 y + P_0$$

satisfont à la condition

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = C e^{\int P_n A'_{n-3} + \ldots + P_3 \, (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) \, dx},$$

où C est constant, et où les A' s'expriment par des wronskiens à quatre lettres y_1, y_2, y_3, y_4. L'auteur applique ensuite cette formule aux équations algébriques.

Giudice (*F.*). — Sulle successioni di numeri reali. (Sur les suites de nombres réels.) (191-197.)

Au sujet de l'ensemble dérivé d'un ensemble dénombrable, M. Giudice se pose divers problèmes, tels le suivant : *Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à une suite pour qu'elle puisse être transformée en suite monotone.*

Toffoletti (*C.*). — Sulla funzione del modulo massimo nelle trascendenti intere di genere finito. (Sur la fonction du module maximum dans les transcendantes entières de genre fini.) (198-221.)

Après avoir rappelé différents points classiques de la théorie des fonctions entières, l'auteur donne divers énoncés sur les sommes et les produits de fonctions entières : il les étudie surtout au point de vue de l'ordre et de la régularité de la croissance.

Fubini (*G.*). — Di un metodo per l'integrazione e lo studio delle equazioni alle derivate parziali. (Sur une méthode pour l'intégration et l'étude des équations aux dérivées partielles.) (222-235.)

L'auteur applique la méthode de Cauchy-Lipschitz aux équations aux dérivées partielles; dans le développement des calculs, il se limite aux équations linéaires de Laplace.

Pexider (*J.-V.*). — Une application d'une formule de Cauchy. (236-240.)

L'auteur se sert d'une formule de Cauchy pour calculer l'intégrale d'une fonction définie par une relation implicite.

Tedone (*O.*). — Sulle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo con speciale riguardo alle forze di massa e su

alcuni problemi relativi alla sfera elastica. (Sur les équations de l'équilibre élastique pour un corps isotrope dans le cas spécial où il existe des forces de masse et sur quelques problèmes relatifs à la sphère élastique.) (241-274.)

M. Tedone étend les résultats qu'il a obtenus antérieurement pour les problèmes d'équilibre élastique isotrope au cas où les forces agissant sur les éléments intérieurs ne sont plus nulles. Après avoir rappelé les notations et les principales formules de son Mémoire des *Annali di Matematica* (sér. III, t. 8, p. 129), il étudie successivement la sphère élastique soumise à des déplacements superficiels donnés (quelconques, normaux ou tangents), puis à des efforts superficiels donnés (mêmes hypothèses), et il termine en résolvant le problème dans le cas où l'on connaît les composantes tangentielles des déplacements et les composantes normales des efforts (ou *vice versa*).

Calapso (*P.*). — Sulla superficie a linee di curvatura isoterme. (Sur la surface à lignes de courbures isothermes.) (275-286.)

Soit S une surface à lignes de courbures isothermes, prises pour courbes coordonnées; en écrivant les déterminants de Gauss sous la forme

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)e^{\tau}, \qquad D' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega)e^{\tau} \qquad [ds^2 = e^{2\tau}(du^2 + dv^2)],$$

l'auteur montre que ω satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v}\right) + \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\omega^2 = 0;$$

il étudie par cette voie les invariants de S relativement à l'inversion, et il termine en rattachant la transformation de M. Darboux à une autre, plus générale.

Sinigallia (*L.*). — I simboli di Christoffel estesi per le forme differenziali di primo ordine e di grado qualunque. (Les symboles de Christoffel étendus aux formes différentielles du premier ordre et de degré quelconque.) (287-296.)

Soit F une telle forme; l'auteur considère des matrices formées au moyen des symboles de Christoffel relatifs à F (au sens, généralisé, de M. Pascal); ces matrices jouissent de propriétés invariantes par rapport aux changements de variables. Pour qu'elles aient la caractéristique 1 ou 2, il faut et il suffit que F soit la puissance d'une différentielle exacte, ou d'une expression de Pfaff complètement intégrable.

Mineo (*C.*). — Sulla curva luogo dei punti di contatto delle superficie d'un fascio d'ordine n con le superficie d'un fascio

d'ordine n'. (Sur la courbe lieu des points de contact des surfaces d'un faisceau d'ordre n avec les surfaces d'un faisceau d'ordre n'.) (297-310.)

Après avoir construit la courbe (comme intersection complète de deux surfaces), l'auteur en détermine l'ordre et le genre; il calcule le nombre des couples de surfaces qui ont des contacts stationnaires ou des doubles contacts; et comme application, il étudie le cas où l'un des faisceaux est formé de plans.

Ferretti (*G.*). — Sulla generazione delle involuzioni piane di classe zero ed uno. (Sur la génération des involutions planes de classe zéro et un.) (311-326.)

Les premiers travaux systématiques sur les involutions planes I d'ordre > 1 remontent à M. Castelnuovo; ils reposent sur la considération d'une surface F, normale dans un S_r, et fournissant une image birationnelle de l'involution. L'auteur développe cette méthode et montre, notamment, qu'à toute courbe d'ordre m appartenant à I, correspond sur F une courbe d'ordre m et inversement. Puis il aborde la construction effective des involutions de classe 0 (et, en particulier, celles de de Jonquières); il termine par différentes propositions relatives aux involutions de classe 1.

Petrovitch (*M.*). — Généralisation de certaines formules de Stieltjes. (327-334.)

Dans la théorie de la fonction Γ, Stieltjes avait établi diverses formules, que généralise M. Petrovitch; voici l'un de ses énoncés : Si, pour $\mathcal{R}(z) > \lambda$ et $\mathcal{R}(t) > \lambda$, $f(t)$ et $\Phi(z, t)$ sont holomorphes, $f\Phi$ tendant vers zéro avec $|t^{-1}|$, on a

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(z, \lambda + ti)}{\Phi(z, z)} \frac{f(\lambda + ti)}{\lambda + ti - z}\, dt.$$

Cette formule et ses analogues facilitent le calcul des coefficients du développement d'une fonction en série de Taylor.

Orlando (*L.*). — Sulla deformazione di un triedro trirettangolo e di una lastra indefinita, elastici, isotropi. (Sur la déformation d'un trièdre trirectangle et d'une plaque indéfinie, élastiques, isotropes.) (335-352.)

Puglisi (*M.*). — La deformazione del triedro isotropo trirettangolo per speciali condizioni ai limiti. (La déformation du trièdre isotrope trirectangle avec des conditions aux limites de forme spéciale.) (353-367.)

Les deux auteurs étendent au trièdre les méthodes données par M. Marco-

longo pour le dièdre; en outre, M. Orlando étudie le cas de la plaque, abordé précédemment par MM. Cerruti et Somigliana.

Vivanti (*G.*). — Dimostrazione diretta d'un teorema sulle serie asintotiche. (Démonstration directe d'un théorème sur les séries asymptotiques.) (368-370.)

Il s'agit du théorème qui permet de dériver une série asymptotique (lorsque la dérivée existe). L'auteur le démontre par un procédé récurrent fondé sur ce fait que si, pour $x = \infty$, il existe une valeur limite pour la dérivée d'une fonction $f(x)$ à valeur asymptotique finie, cette valeur est nulle.

Marletta (*G.*). — Le trasformazioni cubiche (2, 2) fra piani. [Les transformations cubiques (2, 2) entre plans.] (371-385.)

M. Marletta étudie les transformations (2, 2) entre deux plans, transformations qui font correspondre aux droites de l'un des cubiques de l'autre. Il montre que ces cubiques doivent être de même genre dans les deux plans, et, suivant que le genre est 0 ou 1, il indique comment on peut construire géométriquement la transformation sans sortir d'aucun des plans.

René Garnier.

ACTA MATHEMATICA.

Tome 32, 1909.

H. Schumacher. — Ueber eine Riemann'sche Funktionenklasse mit zerfallender Thetafunktion. (Sur une classe de fonctions de Riemann comprenant une fonction thêta dégénérescente.)

Soit $f(z)$ une fonction entière; l'auteur rappelle que M. Wellstein a montré (*Nova Acta Leopoldina*, t. LXXIV, n° 2), par l'emploi d'un système canonique normal de rétrosections, sur la surface de Riemann relative à $s = \sqrt[n]{f(z)}$ que, si n est un nombre premier et que $f(z)$ ait exactement $n.m$ zéros distincts, les modules de périodicité des intégrales de première espèce du corps défini par $s = \sqrt[n]{f(z)}$ ne dépendent seulement que de $n.m - 3$ des modules des points de ramification. La méthode de M. Wellstein avait déjà été appliquée à quelques cas particuliers. Dans ce travail, l'auteur l'applique au cas de $n = 5$, $m = 1$. Il montre en particulier, en s'appuyant sur les travaux de M. Émile Picard, que, l'invariant du 18e ordre de $f(z)$ étant nul sans que pour cela des zéros de cette fonction viennent à coïncider, quatre intégrales de première espèce sont réductibles; la fonction thêta correspondante se décompose en deux facteurs, représentant deux fonctions de genres 2 et 4.

Hartogs (*F.*). — Ueber die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde. (Sur les figures formées par les points singuliers d'une fonction analytique de plusieurs variables.)

Cette étude des singularités d'une fonction analytique de plusieurs variables s'applique seulement au cas restreint qui correspondrait, pour une fonction d'une seule variable, à une singularité isolée. Dans ce cas, les figures singulières d'une fonction analytique sont elles-mêmes analytiques. M. Hartogs étudie en particulier le cas d'une singularité non essentielle, où la fonction considérée peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions analytiques régulières. Dans le cas général, la figure singulière se définit en égalant à zéro une fonction des variables qui, elle, est régulière au voisinage de la singularité de la fonction que l'on étudie.

Korn (*A*). — Ueber die Cosserat'schen Funktionentripel und ihre auwendungen in der Elästizitätstheorie. (Sur les systèmes triples de fonctions de Cosserat, et leur application à la théorie de l'élasticité.)

MM. E. et F. Cosserat ont démontré que, pour $K_j < 1$, le système

$$\begin{cases} \Delta U_j + K_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, & \Delta W + K_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = 0, \\ \Delta V_j + K_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = 0, & \Theta_j = \dfrac{\partial U_j}{\partial x} + \dfrac{\partial V_j}{\partial y} + \dfrac{\partial W_j}{\partial z} \end{cases}$$

admet des solutions continues et univoques U_j, V_j, W_j, s'annulant sur la surface ω d'un volume τ dans lequel Θ_j est une fonction harmonique donnée. Ils avaient, de plus, laissé entrevoir que, dans le cas général de l'équilibre élastique, il serait sans doute possible de développer les solutions u, v, w des équations fondamentales de l'élasticité sous la forme

$$u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \qquad v = C_1 V_1 + C_2 V_2 \ldots, \qquad w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \ldots.$$

M. Korn étudie ces développements, dans le cas où la surface ω est à courbure régulière.

Baire (*René*). — Sur la représentation des fonctions discontinues (deuxième Partie).

L'auteur, pour poursuivre l'étude des fonctions de classe > 1 [*voir* l'Analyse du Tome 30 (¹)], introduit une notion nouvelle, celle d'*ensembles de suites d'entiers*, ou d'espace à 0 dimension; puis, après avoir étudié les fonctions dont l'argument est un élément de tels ensembles, M. Baire termine en donnant une condition très large pour qu'une fonction soit de classe ≤ 3.

(¹) *Bulletin*, t. XLI, 1917, p. 101.

Schœnflies (*A.*). — Ueber eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre (Sur un prétendu paradoxe de la théorie des ensembles).

M. Schœnflies a en vue, dans cette courte Note, de montrer que l'argumentation de M. Richard (*voir* Analyse du Tome XXX) est fautive.

Zermelo (*E.*). — Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète.

L'auteur, en recourant au principe du « choix arbitraire », montre d'abord comment se ramènent l'une à l'autre les diverses définitions des ensembles finis, et donne une nouvelle définition du caractère fondamental de ces ensembles. Le principe de l'induction complète se trouve, en définitive, réduit à la définition des ensembles finis.

Poincaré (*H.*). — Réflexions sur les deux Notes précédentes.

M. H. Poincaré examine d'abord les diverses critiques que présente, sur le travail de M. J. Richard, M. Schœnflies, dans l'avant-dernière Note; aucune d'entre elles ne résiste à un examen approfondi, mais elles permettent à l'auteur de faire de profondes réflexions sur l'infini actuel et les ensembles dénombrables, ainsi que sur une démonstration donnée par M. Zermelo dans la Note précédente.

Lauricella (*Giuseppe*). — Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.

En remplaçant cette équation $\Delta^4 U = f(x, y)$ par un système de deux équations où les dérivées premières de U figurent comme inconnues nouvelles, et en généralisant la notion de potentiel newtonien, l'auteur traite le problème dans les deux cas du problème intérieur, puis extérieur (plaque d'aire infinie), mais en supposant que le contour ne forme pas d'angles. Le cas du rectangle est ensuite traité à part par une nouvelle méthode directe.

Montessus (*R. de*). — Les fractions continues algébriques.

L'auteur étudie d'abord la question du développement d'une fonction en fraction continue; la méthode de Laguerre n'est pas susceptible d'extension. Ensuite, M. de Montessus étudie la convergence de certaines fractions continues, et généralise une méthode qu'il a donnée précédemment pour obtenir les lieux de divergence d'une fraction continue.

Enriques (*Federigo*) et *Severi* (*Francesco*). — Mémoires sur les surfaces hyperelliptiques.

Ce Mémoire est consacré à l'étude des surfaces algébriques $F(x, y, z) = 0$,

ou x, y, z peuvent s'exprimer en fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Les auteurs introduisent plusieurs caractères de ces surfaces (diviseurs, rang, genre) et, utilisant de nombreux travaux de M. E. Picard sur les fonctions abéliennes, font une étude approfondie des surfaces hyperelliptiques, les classent en famille et étudient leur mode de représentation.

P. Drouin.

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

Tome LXIV (t. VII de la Série 8e), 1904-1905.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amici e corrispondenti di Galileo. — XII. Vincenzo Renieri. (Amis et correspondants de Galilée. XII. Vincenzo Renieri.) (111-195.)

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [D2*a*] Analogia fra alcune serie di polinomi e le serie di potenze. (Analogie entre certaines séries de polynomes et les séries de puissances.) Note I (423-429), Note II (1143-1154).

Théorème relatif à l'existence d'un champ connexe, à l'intérieur duquel une série de polynomes est convergente.

Rossi (*L.-V.*). — [S3*b*] Contributo all'idraulica lagunare. Metodo teorico per calcolare le portate e le velocità medie effettive a traverso le foci portuali. (Contribution à l'hydraulique des lagunes. Méthode théorique pour calculer les portées et les vitesses moyennes effectives à travers les embouchures des ports.) (549-581.)

De Marchi (*L.*). — [S3*b*] La morfologia lagunare e il regime stazionario di marea. (La morphologie lagunaire et le régime stationnaire de marée.) (683-714, une planche.)

Severini (*C.*). — [D1*bα*] Sulla serie di Fourier. (Sur la série de Fourier.) (801-813.)

Zanon (*G.-A.*). — [D1*bα*] Portata d'una bocca di estuario. (Portée d'une bouche d'estuaire.) (815-831.)

Cattaneo (*P.*). — [O6*r*] Alcuni teoremi intorno alle sviluppata armonica. (Quelques théorèmes sur la développée harmonique.) (1039-1052.)

Lieu du conjugué harmonique de chaque point d'une surface donnée, par rapport aux deux centres de courbure.

Bernardi (*E.*). — [R8*c*] Soluzione del problema generale dello sterzo corretto con sole aste reticolate per un sistema comunque complesso. (Solution du problème général du guidon corrigé avec de seules tiges articulées pour un système complexe quelconque.) (1331-1345, une planche.)

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XIII. Vincenzo Galilei. (Amis et correspondants de Galilée. XIII. Vincent Galilei.) (1349-1377.)

Levi-Civita (*T.*). — [S2*d*] Sulla contrazione delle vene liquide. (Sur la contraction des veines liquides.) (1466-1472.)

En se fondant sur le théorème de Green, l'auteur établit une formule dont on peut déduire les cas connus relativement à la contraction, c'est-à-dire que le coefficient de contraction est plus grand que $\frac{1}{2}$, et se réduit égal à $\frac{1}{2}$ lorsque l'orifice est muni d'un tube cylindrique intérieur. De la formule de l'auteur on déduit aussi que le coefficient de contraction devient plus petit que $\frac{1}{2}$ pour les orifices munis d'un tube intérieur divergent.

Severini (*C.*). — [D4] Intorno alle serie di funzioni analitiche. (Sur les séries de fonctions analytiques.) (1609-1613.)

Si la série

$$\Sigma f_n(z),$$

dont les termes sont des fonctions analytiques dans une aire T, est convergente pour toute valeur de z appartenant à un ensemble de points, uniformément condensé en T, et si, pour tous ces points, on a

$$|S_n(z)| = |f_1(z) + \ldots + f_n(z)| \leqq G,$$

quel que soit n, la série est convergente pour toute valeur de z et représente une fonction analytique en T.

Ce théorème, dû à Osgood, a été aussi démontré par une autre voie par M. Arzelà et par l'auteur (*Rendiconti dei Lincei*, 5ᵉ série, t. III, 2ᵉ semestre). M. Arzelà a démontré aussi que si l'aire T est simplement connexe, il doit

exister une ou plusieurs fonctions analytiques uniformes auxquelles s'approchent uniformément des successions tirées de la succession

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots.$$

L'auteur démontre d'une manière élémentaire cette proposition de M. Arzelà et en déduit d'autres conséquences et généralisations.

Mazzelli (*C.*). — [D2*ab*] Sulla continuità di una serie doppia di funzioni. (Sur la continuité d'une série double de fonctions.) (1693-1704.)

Condition nécessaire et suffisante pour la continuité.

Tome LXV; 1905-1906.

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XIV. Giacomo Badoer. XV. Martino Hastal. (Amis et correspondants de Galilée. XIV. Jacques Badouère. XV. Martin Hastal.) (183-208.)

Paoletti (*T.*). — [S3*b*] Studio sul calcolo dei canali regolati. (Étude sur le calcul des canaux réglés.) (249-263.)

Lorenzoni (*G.*). — [U] Il problema della correzione di un'orbita secondo il prof. Bauschinger. (Le problème de la correction d'une orbite suivant le professeur Bauschinger.) (319-370, une planche.)

Sartori (*A.*). — [R7] Movimenti piani conservativi a traiettorie circolari. (Mouvements plans conservatifs à trajectoires circulaires.) (399-433.)

Le potentiel U est déterminé par les équations

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 x}{\partial x . \partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

où

$$-z = \log \sqrt{2(U + E)},$$

E étant une constante. L'intégration, dans l'hypothèse que les trajectoires

soient des cercles, donne

$$\sqrt{2(U+E)} = \frac{z}{k}\{x^2+y^2-c\}^{-1},$$

où k et c sont des constantes.

Ces trajectoires sont représentées conformément sur les lignes géodésiques d'une surface dont l'élément linéaire est

$$ds_1 = \sqrt{2T_1}.dt,$$

où

$$T_1 = 2(U+E)T,$$

et l'on trouve que cette surface est à courbure constante, positive ou négative suivant que c est négative ou positive. On réduit les surfaces à deux types, celui de la sphère et celui de la pseudosphère. Dans le premiers cas, les cercles en question sont ceux qui coupent diamétralement un même cercle; dans le second, ce sont les cercles qui coupent orthogonalement un même cercle.

Zanon (*G.-A.*). — [S3 ref. U8] Origine del flusso e del riflusso nell'estuario veneto. Conseguenze pratiche della ricerca. (Origine du flux et du reflux dans l'estuaire vénitien. Conséquences pratiques de la recherche.) (415-443.).

Rossi (*L.-V.*). — [T2*b*] Le prove statiche del nuovo ponte metallico sul Po di Venezia presso Corbola (Adria). [Les essais statiques du nouveau pont sur le Pô de Venise près de Corbola (Adria).] (445-446, une planche.)

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [A3*aα*] Sul teorema fondamentale dell'Algebra. (Sur le théorème fondamental de l'Algèbre.) (551-556.)

Démonstration de l'existence d'une racine, fondée sur les propriétés de la correspondance

$$y = f(x)$$

entre deux plans complexes x et y.

De Marchi (*L.*). — Considerazioni generali sulle circolazione delle atmosfere della terra, del sole e di Giove. (Considérations générales sur la circulation des atmosphères de la Terre, du Soleil et de Jupiter.) (591-610.)

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.

XVI. Beniamino Engelcke. (Amis et correspondants de Galilée. XVI. Benjamin Engelcke.) (585-592.)

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XVII. Lodovico Settala. (Amis et correspondants de Galilée. XVII. Lodovico Settala.) (597-654.)

La numérotation des pages doit être 627-654.

Severi (*F.*). — [$M_2$8] Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà. (Quelques observations de Géométrie sur une surface algébrique et sur une variété.) (625-643.)

La numérotation des pages doit être 655-673.

Si l'on a un système continu de courbes algébriques A sur une surface F, et ces courbes sont telles que les courbes kA donnent des groupes d'une même série linéaire sur une courbe C, capable de définir un système continu infini (différent d'un faisceau irrationnel), les courbes A sont équivalentes.

Pascal (*E.*). — [C4] Sulle matrici formate cogli elementi di un sistema covariante. Estratto di una lettera al prof. T. Levi-Civita. (Sur les matrices formées avec les éléments d'un système covariant. Extrait d'une lettre à M. le Professeur Levi-Civita.) (1117-1120.)

Si l'on a un système covariant de fonctions $X_{i_1 \ldots i_m}$ de $x_1, \ldots, x_n$, à m indices, où l'on fait une séparation des indices en deux groupes de K et de $m - K$ indices respectivement, et si l'on dispose les $X_{i_1 \ldots i_m}$ en une matrice, en posant dans une même ligne celles qui ont un même système des K premiers indices et dans une même colonne celles qui ont un même système des $m - K$ autres, toutes ces matrices ont une caractéristique invariante pour toute transformation de variables.

Scrosoppi (*P.*). — [H9h3] Estensione del metodo delle caratteristiche alla integrazione di sistemi di più equazioni. (Extension de la méthode des caractéristiques à l'intégration de systèmes de plusieurs équations.) (1121-1144.)

Le système considéré par l'auteur est

$$\sum_1^3{}_r \left[A_r \frac{\partial u}{\partial x_r} + B_r \frac{\partial v}{\partial x_r} \right] = F_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$\sum_1^3{}_r \left[C_r \frac{\partial u}{\partial x_r} + D_r \frac{\partial v}{\partial x_r} \right] = F_2(x_1, x_2, x_3).$$

Les surfaces caractéristiques sont

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

f étant une fonction qui satisfait à l'équation

$$\Phi(f) = \sum_1^3 H_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,$$

où

$$H_{rs} = A_r D_s - C_r B_s.$$

Lorsque l'équation

$$\Phi(f) = 0$$

admet des intégrales réelles, on peut appliquer la méthode Riemann-Volterra.

En introduisant la considération du système adjoint

$$\sum_1^3{}_r \left[\frac{\partial(A_r u)}{\partial x_r} + \frac{\partial(C_r v)}{\partial x_r} \right] = 0,$$

$$\sum_1^3{}_r \left[\frac{\partial(B_r u)}{\partial x_r} + \frac{\partial(D_r v)}{\partial x_r} \right] = 0,$$

l'auteur trouve une formule fondamentale qui a, dans ce cas, un office analogue à celui de la formule de Green. La détermination des intégrales auxiliaires est facilitée par une opportune décomposition.

La recherche est faite pour le cas où

$$\Phi(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2.$$

De Toni (*G.-B.*). — [V] Leonardo da Vinci e Luca Paciolo. (Léonard de Vinci et Luca Paciolo.) (1145-1148.)

Levi-Civita (*T.*). — [S6*b*] Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzo solidi. (Sur la pénétration des projectiles dans les milieux solides.) (1149-1158, une page d'*errata*.)

Explication d'un paradoxe apparent. La pénétration ne croît pas constamment avec la diminution de la distance du but, mais il y a une distance correspondant à un *maximum* de pénétration. La cause de cela est dans la déformation que le projectile subit en rencontrant une paroi solide, et qui croît lorsque la distance diminue, en opposant une résistance toujours plus grande à la pénétration.

Barbieri (*U.*). — [U10*a*] Sulla precisione que si può reggiungere col metodo Villarceau nelle determinazione del geoide. (Sur la

précision que l'on peut atteindre avec la méthode Villarceau dans la détermination du géoïde.) (1239-1263.)

Cisotti (*U.*). — [S2*e*] Sul paradosso di d'Alembert. (Sur le paradoxe de d'Alembert.) (1292-1295.)

Un solide plongé dans un liquide indéfini, et doué d'un mouvement uniforme de translation, ne rencontre aucune résistance, en supposant que le mouvement que le liquide prend par effet du mouvement du solide soit partout continu.

Fubini (*G.*). — [G6] Sulla teorie delle funzioni automorfe. (Sur la théorie des fonctions automorphes.) (1297-1299.)

Exposé des résultats (sans les démonstrations) qui se trouvent dans un Mémoire que l'auteur annonce à publier dans les *Acta mathematica*.

Severini (*C.*). — [Q3] Sopra i concetti di continuità e connessione nello spazio. (Sur les concepts de continuité et de connexion dans l'espace.) (1301-1306.)

Ensemble que l'on obtient en ôtant d'un espace S_n un ensemble de points ou même d'espaces subordonnés. Conditions sous lesquelles cet ensemble résiduel est connexe.

Tome LXVI; 1906-1907.

Favaro (*A.*). — [V7] L'invenzione del telescopio secondo gli ultimi studi. (L'invention du télescope suivant les plus récentes études.) (1-54.)

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e correspondenti di Galileo Galilei. XVIII. Raffaello Gualterotti. (Amis et correspondants de Galilée. XVIII. Raphaël Gualterotti.) (119-139).

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XIX. Giannantonio Rocca. (Amis et correspondants de Galilée. XIX. Jean-Antoine Rocca.) (141-167.)

Sibirani (*F.*). — [M4 3] Costruzione delle tangenti alle curve di certe classi. (Construction des tangentes aux courbes de certaines classes.) (339-362.)

Étant ω, ω' les angles que les droites OM, O'M font respectivement

avec OO′, l'équation

$$\varphi(\omega, \omega') = 0$$

représente une courbe. Lorsque φ est une fonction rationnelle entière des fonctions trigonométriques de ω, ω', on peut construire la tangente à cette courbe par la règle et le compas.

Lori (*F.*). — [T7*c*] Alcune formule relative alle scariche oscillatorie. (Quelques formules relatives aux décharges oscillatoires.) (387-393.)

Viterbi (*A.*). — [U10*a*] Sulla determinazione del potenziale esterno della gravità e dell' equazione del geoide mediante le deviazioni della verticale. (Sur la détermination du potentiel extérieur de la gravité et de l'équation du géoïde au moyen des déviations de la verticale.) (425-451.)

Cattaneo (*P.*). — [J1*a*] Sulle sostituzioni irreducibili. (Sur les substitutions irréductibles.) (559-563.)

Ce sont les substitutions par lesquelles tous les n éléments changent de place. Leur nombre est

$$I_n = \underline{|n}\left(\frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{\underline{|n}}\right).$$

Scrosoppi (*P.*). — [C4*a*] Invarianti differenziali dei sistemi di due equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali del primo ordine. (Invariants différentiaux des systèmes de deux équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre.) (681-695.)

Étant donnés deux de tels systèmes, où entrent deux fonctions u, v, et dont l'un est relatif aux variables $x_1, \ldots, x_n$, l'autre aux variables $x'_1, \ldots, x'_n$, l'auteur étudie les conditions sous lesquelles on peut transformer l'un des deux systèmes en l'autre par un changement de variables indépendantes.

Tome LXVII, 1907-1908.

Favaro (*A.*). — [V7] Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXI. Benedetto Castelli. (Amis et correspondants de Galilée. XXI. Benedetto Castelli.) (1-130.)

D'Arcais (*F.*). — [H10] Sulle integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine qualunque. (Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque.) (191-209.)

Application de la méthode symbolique, en partant de l'observation que si l'on indique par D^n l'opération de dérivation, on a

$$D^n(C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}) = 0$$

et que, par suite, l'équation linéaire *ordinaire*

$$Fu = (D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) u = 0$$

étant donnée, on peut calculer la fonction u par l'opération inverse de F

$$u = \frac{1}{F} 0 = \frac{1}{F} D^n (C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}),$$

où $\frac{1}{F}$ est développé en série.

Cisotti (*U.*). — [S2*d*] Sull'impiego delle funzioni ellittiche in una questione d'idrodinamica. (Sur l'emploi des fonctions elliptiques dans une question d'hydrodynamique.) (293-321.)

Écoulement des liquides. Calcul des intégrales pour le cas où il y a une embouchure interne.

Severi (*F.*). — [$M_2$8] Sulle superficie algebriche che ammettano un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali. (Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu permutable à deux paramètres, de transformations birationnelles.) (409-419.)

Ces surfaces, étudiées d'abord par M. Picard (*Journ. de Math.*, 4e série, t. V, 1889, et *Rend. di Palermo*, 1895), puis par M. Painlevé (*Act. math.*, t. XXVII, 1903) et M. Enriquez (*Rend. di Palermo*, 1905), sont étudiées ici par l'auteur par voie synthétique. On prouve que pour une telle surface il doit être

$$p_a = -1, \qquad p_g = 1$$

et l'ordre de la courbe canonique $= 0$. Ces conditions sont aussi suffisantes.

Da Rios (*L.-S.*). — [D1] Sul sistema di due equazioni implicite, studiato da Laplace. (Sur le système de deux équations implicites, étudié par Laplace.) (457-462.)

Le système est le suivant :

$$y - x + \varphi(y, z) = 0,$$
$$z - t + \psi(y, z) = 0.$$

Favaro (*A.*). — [U2*b*] Intorno ad une scrittura inedita di Archimede, nuovamente scoperta e pubblicata. (Sur un écrit inédit d'Archimède, récemment découvert et publié.) (635-638.)

De Marchi (*L.*). — [S5] Teoria della doppia oscillazione diurna del barometro. (Théorie de la double oscillation diurne du baromètre.) (639-657.)

Favaro (*A.*). — [V7] Per la storia del compasso di proporzione. (Pour l'histoire du compas de proportion.) (723-739, une planche.)

Torelli (*R.*). — [$M_1$2] Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite appartenenti ad una curva algebrica. (Sur la linéarité des involutions plusieurs fois infinies, appartenant à une courbe algébrique.) (831-835.)

L'auteur en donne une démonstration qui ne sort pas du champ de la Géométrie sur une courbe.

Voir aussi une observation à la page 1336.

Levi-Civita (*T.*). — [T7] Sui campi elettromagnetici puri dovuti a moti piani permanenti. (Sur les champs électromagnétiques purs, dus à des mouvements plans permanents.) (995-1010.)

On considérait le mouvement de l'électricité, ou comme une *conduction* (courants galvaniques), ou comme une *convexion* (*ions électrolytiques*). Pour les rayons cathodiques on adoptait l'hypothèse de la convexion. A la suite de certaines incongruences résultant de cette dernière hypothèse, on considère (Abraham et Kaufmann) un mouvement d'électricité sans intromission de matière pondérable. Mais cela aussi avait ses inconvénients, car il fallait supposer que le mouvement des charges satisfasse à des conditions cinématiques données et qu'il continue à être rigide même à la limite. L'auteur renonce à tout lien additionnel et étudie le mouvement en supposant la validité des relations fondamentales des champs électromagnétiques, et que pour chaque charge élémentaire la force mécanique totale soit nulle. Pour ces champs électromagnétiques purs, l'auteur a donné dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, août 1907, p. 417, un type de solutions pour le cas des ondes planes; puis Mlle Caffaretti (*Nuovo Cimento*, 1908, p. 369) a donné les solutions pour les mouvements rigides et stationnaires. Ici l'auteur donne

toutes celles correspondant à des mouvements plans ayant caractère stationnaire.

Sibirani (*F.*). — [H 10] Esistenza degli integrali in alcuni tipi di equazioni alle derivate parziali. (Existence des intégrales pour certaines types d'équations aux dérivées partielles.) (1153-1183.)

Torelli (*R.*). — [M_1 2] Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica. (Sur les séries algébriques de groupes de points appartenant à une courbe algébrique.) (1323-1335.)

Le nombre des groupes de $r+1$ points, communs à des groupes d'une série d'ordre μ et d'indice ν, par une courbe de genre π, et a des groupes d'une série linéaire g'_n, a été trouvé par Schubert. L'auteur fait l'extension aux séries plusieurs fois infinies. Autres observations, particulièrement sur les surfaces contenant des faisceaux irrationnels de courbes.

S. Rindi.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

Serie III, Tomo XVII, 1910.

Iseli (*F.*). — Lösung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges. (Calcul d'intégrales définies par changement du chemin d'intégration.) (1-28.)

Calcul de différentes intégrales définies se déduisant d'intégrales connues par des changements de variables qui transforment le chemin d'intégration. L'auteur transforme de la sorte l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = 2i\pi \int x^{-a} e^{-x} dx,$$

où le chemin d'intégration est formé des deux bords d'une coupure tracée le long de la partie négative de l'axe réel et d'un petit cercle entourant l'origine. Il transforme d'autres intégrales se rattachant à la fonction Γ et il obtient ainsi de nombreuses formules relatives à cette dernière fonction.

Tonolo (*A.*). — Sull' integrazione delle equazioni fondamentali dell' elettrodinamica. (Sur l'intégration des équations fondamentales de l'électrodynamique.) (29-59.)

L'auteur considère les équations de Maxwell-Hertz et il se propose de déterminer la force électrique E et la force magnétique H en tout point intérieur à un champ S, en supposant qu'on donne à chaque instant les valeurs de ces forces sur la surface σ qui limite le champ, et cela dans l'hypothèse d'une surface σ variable avec le temps. L'auteur utilise la formule de Kirchhoff relative à l'équation canonique des petits mouvements et il emploie des méthodes d'intégration introduites par M. Volterra et par M. Tedone dans d'autres questions de Physique mathématique.

En supposant que la surface σ est fixe, il démontre que la connaissance de E et de H sur la surface σ à chaque instant (E et H vérifiant deux conditions nécessaires) entraîne celle des dérivées normales des projections de E et de H sur les trois axes et il en déduit, sous une forme simple, les expressions de ces composantes. Il passe ensuite de là au cas d'une surface σ mobile avec le temps.

Levi (*E.-E.*). — Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse. (Études sur les points singuliers essentiels des fonctions analytiques de deux ou plusieurs variables complexes.) (61-87.)

Soit $f(x, y)$ une fonction analytique monodrome de deux variables complexes. L'auteur se propose de montrer que les variétés de l'espace (x, y) à quatre dimensions formées par les points singuliers *essentiels* de $f(x, y)$ sont assujetties à des conditions très restrictives, contrairement à une affirmation de Weierstrass d'après laquelle, étant donné arbitrairement dans l'hyperespace un champ continu à quatre dimensions, il existerait toujours une fonction méromorphe dans le champ et ayant pour singularités essentielles tous les points de la frontière du champ.

M. Hartogs (*Acta mathematica*, 1909) a caractérisé les champs dans lesquels la fonction peut être régulière. M. Levi cherche à caractériser de même les champs dans lesquels la fonction peut être méromorphe. Parmi les propositions qu'il donne à ce sujet, citons les suivantes :

1° L'ensemble des points singuliers *essentiels* d'une fonction analytique de deux variables est parfait;

2° Si une fonction $f(x, y)$ est méromorphe en tous les points d'une hypersurface fermée, elle est méromorphe à l'intérieur de celle-ci. Il en résulte qu'une fonction monodrome méromorphe de deux variables ne peut pas avoir des espaces lacunaires situés entièrement à distance finie.

Enfin, en posant

$$x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 + iy_2,$$

M. E.-E. Levi cherche à quelle condition l'hypersurface S, qui a pour équation

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0,$$

où φ est continue ainsi que ses dérivées premières et secondes, peut être la frontière du champ d'existence d'une fonction analytique, méromorphe dans l'un des deux champs $\varphi > 0$, $\varphi < 0$ ou dans une portion de l'un de ces champs, les points de la frontière étant des points singuliers essentiels. Il trouve comme

condition nécessaire qu'un certain polynome dépendant des dérivées partielles premières et secondes de φ doive avoir un signe constant dans le champ considéré. Ce polynome doit être nul si S doit être la frontière commune de deux fonctions méromorphes, l'une dans le champ $\varphi > 0$, l'autre dans le champ $\varphi < 0$, de sorte que la fonction φ est alors une intégrale d'une équation aux dérivées partielles. Dans ce dernier cas, l'auteur montre que la condition trouvée est suffisante et il montre comment on peut construire les deux fonctions méromorphes répondant à la question.

Signorini (*A.*). — Sulla permutabilità della trasformazione H colla trasformazione B_k nella teoria delle superficie applicabili sulle quadriche. (Sur la permutabilité de la transformation H et de la transformation B_k dans la théorie des surfaces applicables sur les quadriques.) (89-103.)

L'auteur étend à un espace à courbure constante quelconque certaines propriétés des transformations H et B_k établies dans l'espace ordinaire (Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, t. III, n° 78).

Russyan (*C.*). — Dimostrazione d'un teorema sopra i massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti. (Démonstration d'un théorème sur les maximums et les minimums des fonctions de plusieurs variables indépendantes.) (105-109.)

Nouvelle démonstration de l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour la fonction $f(x, y, \ldots, z)$ en un point où toutes les derivées partielles jusqu'à l'ordre $2n-1$ sont nulles, la forme de degré $2n$ constituée par les termes de moindre degré de la formule de Taylor étant une forme définie.

Fubini (*G.*). — Equazioni integrali e valori eccezionnali. (Équations intégrales et valeurs exceptionnelles.) (111-139.)

L'auteur développe par une méthode directe la théorie des équations intégrales *polaires* dont les bases ont été posées par M. Hilbert en se servant des formes quadratiques à une infinité de variables. L'équation homogène est dans ce cas

$$\int_a^b K(s, t) V(s) \varphi(s) dS = \mu \varphi(t).$$

où $K(s, t)$ est symétrique et où $V(s)$ est une fonction intégrable prenant seulement les valeurs $+1$ et -1. M. Fubini cherche pour quelles valeurs de μ il existe une fonction φ non nulle, intégrable ainsi que son carré, vérifiant l'équation précédente (fonction *exceptionnelle* obtenue pour une valeur de μ dite *exceptionnelle*). La principale difficulté réside dans la demonstration de l'existence des valeurs et des fonctions exceptionnelles. L'auteur ramène cette démonstration à celle de l'existence de la solution d'un certain problème de minimum.

Tedone (*O.*). — Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo. (Essai d'une théorie générale des équations de l'équilibre élastique pour un corps isotrope.) (141-177.)

Ce troisième Mémoire est consacré à l'ellipsoïde de révolution. Après avoir défini les fonctions harmoniques élémentaires relatives à l'ellipsoïde de révolution, l'auteur résout le problème de l'équilibre élastique : 1° lorsqu'on donne les déplacements à la surface; 2° lorsqu'on donne les efforts à la surface. Il examine comment les solutions devraient être modifiées dans le cas d'un milieu élastique indéfini *extérieur* à un ellipsoïde de révolution.

Sannia (*G.*). — Saggio di geometria differenziale dei complessi di rette. (Essai de géométrie différentielle des complexes de droites.) (179-223.)

L'auteur applique aux complexes de droites une méthode analogue à celle qu'il a donnée pour l'étude des congruences de droites (*Annali*, t. XV). Son but est de donner ici, comme pour les congruences, une théorie semblable à la théorie des surfaces de Gauss, fondée sur l'emploi de deux formes quadratiques fondamentales. Dans le cas des complexes, ces deux formes sont des formes ternaires, dont la première est réductible, car elle dépend seulement de la direction des droites du complexe et ne contient par suite que deux paramètres essentiels. M. Sannia traite ensuite le problème inverse qui consiste à partir des deux formes différentielles données *a priori* et à chercher à quelle condition il existe des complexes admettant ces deux formes comme formes fondamentales.

L'auteur retrouve, par cette méthode intrinsèque, les propriétés connues des complexes; il étudie particulièrement : 1° les rayons *singuliers* du complexe caractérisés par ce fait que toutes les surfaces réglées du complexe passant par un pareil rayon sont tangentes en un même point fixe du rayon; 2° les rayons *bisinguliers* caractérisés par ce fait que toutes les surfaces du complexe passant par un pareil rayon se touchent en deux points fixes du rayon. Enfin, l'auteur étudie d'une façon systématique les complexes définis par les expressions des coordonnées d'une droite quelconque du complexe en fonction de trois paramètres indépendants.

Pizzetti (*P.*). — Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell' interno della Terra. (Sur les distributions possibles de la masse à l'intérieur de la Terre.) (225-258.)

En partant de la forme supposée connue du géoïde terrestre, c'est-à-dire d'une surface de niveau extérieure à la masse terrestre, l'auteur se propose de rechercher quelles sont les distributions de la masse à l'intérieur de la Terre compatibles avec cette forme du géoïde. A cet effet il cherche, dans une première partie du travail, quelles sont les modifications dans la distribution de la masse qui laissent invariables les surfaces de niveau extérieures. Il démontre

d'abord que les deux corps C et C' correspondant à deux distributions différentes des masses inférieures doivent avoir la même masse totale, le même centre de gravité et les mêmes axes principaux d'inertie : en outre, en désignant par P, Q, R les moments principaux d'inertie de C et par P', Q', R' ceux de C', les différences Q — P, R — Q doivent être respectivement égales à Q' — P', R' — Q'. Le problème ainsi posé revient d'ailleurs à chercher toutes les distributions fictives des masses donnant lieu à un corps d'*attraction nulle* en tout point extérieur à ce corps. M. Pizzetti donne plusieurs méthodes permettant d'obtenir de pareils corps d'attraction nulle, en particulier dans le cas où la surface est un ellipsoïde.

Dans une deuxième Partie, l'auteur recherche quelques modes de distribution de la masse terrestre compatibles avec la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati attribuée à une surface de niveau extérieure. De chacun de ces modes, on déduit tous les autres modes possibles à l'aide du problème traité dans la première Partie.

Dini (*U.*). — Studii sulle equazioni differenziali lineari per riguardo ai loro integrali normali. (Études sur les équations différentielles linéaires relativement à leurs intégrales normales.) (259-280.)

Dans ce Mémoire, M. Dini développe diverses conséquences d'un théorème général relatif aux intégrales *normales* des équations différentielles linéaires qu'il a donné dans les *Annali* (t. XII, p. 179). Il étudie en particulier les équations du second ordre

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = X,$$

où a_0, a_1, a_2 et X présentent les mêmes particularités que dans le précédent travail de l'auteur (voir *Bulletin*, t. XL, 1916, p. 101). Moyennant diverses hypothèses relatives aux conditions aux limites pour $x = a$ et pour $x = b$ et à la façon dont se comportent les intégrales fondamentales pour ces valeurs limites, M. Dini indique des cas généraux où l'on pourra affirmer que X est nul dans tout l'intervalle a, b.

Scorza (*G.*). — Le superficie a curve sezioni di genere 3. (Les surfaces dont les sections planes sont des courbes de genre 3.) (281-330.)

Suite du travail paru dans le Tome précédent des *Annali* sous le même titre. Dans ce travail antérieur, M. Scorza avait énuméré les types de surfaces normales de l'espace ordinaire possédant la propriété indiquée dans le titre. Il caractérise maintenant les surfaces normales des hyperespaces. En outre, il montre comment on peut réduire toute surface normale de seconde espèce à un cône cubique elliptique à l'aide d'une transformation de Cremona et il indique explicitement les formules de transformation pour chacun des cas énumérés dans le premier Mémoire.

Tomo XVIII, 1911.

Bianchi (*L.*). — Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche. (Sur une classe de déformations continues des surfaces pseudosphériques.) (1-68.)

Ce Mémoire est consacré aux déformations *isogonales* des surfaces à courbure constante. Dans une pareille déformation, les trajectoires des divers points de la surface S font un angle constant σ avec cette dernière, cet angle pouvant varier ou non lorsqu'on passe d'une surface du système à une autre.

Étant donnée une transformation isogonale *infinitésimale*, menons par chaque point F de S, et dans le plan tangent, la normale au déplacement du point F. La congruence des droites ainsi obtenues est une congruence pseudosphérique, c'est-à-dire que la deuxième nappe S' de la surface focale est déduite de la nappe S décrite par F à l'aide de la transformation B_σ de Bäcklund $\left(\text{distance FF' des foyers constante et angle des plans focaux constant égal à } \frac{\pi}{2} - \sigma\right)$.

L'auteur passe ensuite à l'étude des déformations isogonales *continues* : une pareille déformation est déterminée lorsqu'on se donne la trajectoire que doit décrire l'un des points de la surface S. La détermination des surfaces Σ ainsi déduites de S dépend d'un système d'équations aux dérivées partielles : les méthodes géométriques de la transformation complémentaire et celle de la transformation de Bäcklund permettent d'avoir, par des quadratures, des solutions dépendant d'un nombre quelconque de constantes arbitraires. En outre, l'auteur étend aux systèmes Σ le *théorème de permutabilité* qu'il a donné dans d'autres questions de déformation : ce théorème permet, connaissant trois systèmes de transformées isogonales d'une même surface S, d'en obtenir un quatrième par des calculs algébriques et par des dérivations.

Levi (*E.-E.*). — Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di existenza di una funzione analitica di due variabili complesse. (Sur les hypersurfaces de l'espace à 4 dimensions qui peuvent servir de frontière au domaine d'existence d'une fonction analytique de deux variables complexes.) (69-79.)

En posant $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, l'auteur a donné, dans le Volume précédent des *Annali*, une condition nécessaire que doit remplir une fonction $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ pour que l'hypersurface S, qui a pour équation

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0,$$

soit la frontière du champ d'existence d'une fonction analytique des deux variables complexes x, y monodrome dans l'un des deux domaines $\varphi > 0$, $\varphi < 0$.

M. E.-E. Levi démontre ici que la condition est suffisante *en tant que propriété infinitésimale*, c'est-à-dire que lorsqu'elle est remplie on peut, étant donnée une portion $\overline{S}$ de la surface S suffisamment petite, trouver une fonction analytique de x et de y régulière aux points du domaine $\varphi > 0$ voisins de $\overline{S}$ et admettant $\overline{S}$ comme frontière. Il indique enfin des cas où l'on est assuré que le théorème est vrai pour tout le champ $\varphi > 0$ (ou $\varphi < 0$) limité par S.

Torelli (*R.*). — Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche. (Sur la « postulation » d'une variété et sur les modules de formes algébriques.) (81-98.)

La dimension du système linéaire des hypersurfaces d'ordre l qui passe par une variété donnée V est fournie, à partir d'une valeur de l suffisamment grande, par la formule

$$\binom{l+r}{r} - 1 - \chi_l(V),$$

où r est la dimension de l'espace, $\chi_l(V)$ un membre que les géomètres italiens appellent la « *postulazione* » de la variété V et qui est fourni par une formule connue due à M. Hilbert. M. Severi a donné une formule qui lie la postulation d'une variété V divisée en deux parties V et V', aux postulations de ces parties. L'auteur étend la formule de M. Severi et il applique ensuite ses résultats aux modules de formes algébriques : il cherche la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme à $r+1$ variables appartienne à un module $(F_1, F_2, \ldots, F_h)$ de h formes données à $r+1$ variables, dans des cas où la variété définie, en égalant à zéro ces dernières formes, est formée de plusieurs parties de dimensions différentes.

Tonelli (*L.*). — Sulle serie di funzioni analitiche della forma $\Sigma a_n(x)x^n$. [Sur les séries de fonctions analytiques de la forme $\Sigma a_n(x)x^n$.] (99-133.)

Soit

$$(1) \qquad a_0(x), \quad a_1(x), \quad \ldots, \quad a_n(x)$$

une suite de fonctions analytiques régulières à l'intérieur d'un domaine A comprenant l'origine. Supposons en outre que la suite des fonctions $|\sqrt[n]{a_n(x)}|$ soit formée de fonctions *également* continues en tout point intérieur à A et que cette suite soit bornée supérieurement pour $x=0$; sous ces hypothèses, l'auteur démontre l'existence autour de l'origine d'une *étoile* S de convergence absolue pour la série

$$(2) \qquad a_0(x) + a_1(x)x + a_2(x)x^2 + \ldots + a_n(x)x^n + \ldots,$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine fermé intérieur à l'*étoile* : la série représente donc, à l'intérieur de l'étoile, une branche monodrome de fonction analytique régulière. Aux conditions précédentes, M. Tonelli substitue ensuite des conditions plus restrictives, mais d'une application plus commode

et permettant, dans un grand nombre de cas, la détermination effective de l'étoile S.

La série $\Sigma a'_n(x)x^n$, où a'_n est la dérivée de a_n, est aussi uniformément convergente dans tout domaine fermé intérieur à S.

Supposons maintenant que les fonctions de la suite (1) vérifient les conditions

$$A_n > 0, \qquad \frac{a_n}{A_n} > p,$$

où p est un nombre positif indépendant de n et où a_n et A_n désignent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $|a_n(x)|$ dans le domaine A. Toute fonction $F(x)$ analytique et régulière dans A est, dans le voisinage de chaque point x_0 intérieur à A, développable en une série de la forme

$$\Sigma c_n a_n(x)(x-x_0)^n,$$

absolument et uniformément convergente.

Le Mémoire se termine par quelques exemples où l'étoile S est déterminée complètement : citons en particulier la série

$$\Sigma(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})^n x^n,$$

pour laquelle S comprend les points x du plan pour lesquels on a simultanément

$$|x|<1 \qquad \text{et} \qquad |x|<|1-x|.$$

Dini (*U.*). — Studii sulle equazioni differenziali lineari in relazione ai loro integrali normali, pel caso di alcune equazioni del secondo ordine. Polinomii integrali. (Recherches sur les équations différentielles linéaires relatives aux intégrales normales de ces équations, dans le cas de certaines équations du second ordre. Intégrales polynomes.) (135-183.)

L'auteur applique les considérations développées dans son précédent Mémoire (*Annali*, t. XVII) à quelques classes spéciales d'équations linéaires du second ordre

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

pour lesquelles a_0, a_1, a_2 sont de la forme

$$\begin{aligned} a_0 &= (x-\alpha)^h\,[A_0+B_0(x-\alpha)^p],\\ a_1 &= (x-\alpha)^{h-1}[A_1+B_1(x-\alpha)^p],\\ a_2 &= (x-\alpha)^{h-2}[A_2+A'_2\varphi(3)+[B_2+B'_2\varphi(3)](x-\alpha)^p], \end{aligned}$$

avec $h=0$, 1 ou 2.

Il examine pour quelles valeurs de $\varphi(z)$ ces équations admettent des intégrales se réduisant à des polynomes. Les équations de la forme

$$(x-a)(b-x)y''+(p+\nu x)y'+n(n-1-\nu)y=0$$

admettent des intégrales polynomes lorsque $\dfrac{p+\nu a}{b-a}$ n'est égal ni à zéro, ni à

un entier négatif, et ce polynome sera en général de degré n. Ces polynomes sont, aux notations près, les polynomes de Jacobi. Comme cas plus particulier, on trouve les polynomes X_n de Legendre.

Bianchi (*L.*). — Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica. (Sur les déformations isogonales des surfaces à courbure constante en géométrie elliptique et hyperbolique.) (185-243.)

Ce Mémoire fait suite à celui qu'a publié l'auteur dans le même Volume (p. 1) des *Annali*. M. Bianchi étend ses recherches sur les systèmes Σ de déformées isogonales de la pseudosphère aux surfaces à courbure constante d'un espace quelconque à courbure constante.

Si on laisse de côté le cas où les surfaces du système Σ sont des surfaces à courbure nulle de l'espace elliptique, cas qui est traité à part, tout système de surfaces Σ correspond d'une façon univoque et réciproque à un système analogue de l'espace euclidien, c'est-à-dire à un système de déformées isogonales de la pseudosphère.

Revenant au cas de l'espace euclidien, M. Bianchi reprend l'étude d'un cas limite laissé de côté précédemment, celui des déformations isogonales des surfaces développables (surfaces à courbure constante nulle).

Scarpis (*U.*). — Successioni ricorrenti in un campo di Galois. (Suites récurrentes dans un champ de Galois.) (245-286.)

Étude de quelques propriétés remarquables de la suite récurrente

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2+1, \quad \alpha^3+2\alpha, \quad \ldots,$$

où α est un quelconque des p^n éléments (p premier, impair) d'un champ (p^n) de Galois engendré par une fonction modulaire de degré n de l'indéterminée x irréductible dans le champ $0, 1, 2, \ldots, (p-1)$.

La suite (α) est périodique et la période, dont le premier terme est nécessairement zéro, présente trois types (A), (B), (C) différents suivant qu'elle contient 0, 1 ou 3 zéros intermédiaires, seuls cas possibles. Le type (C) ne peut se présenter que si (-1) n'est pas résidu quadratique dans le champ (p^n). En laissant ce cas de côté, l'auteur étudie la distribution des éléments (α) du champ (p^n) en deux classes, suivant le type, (A) ou (B), de la période de la suite (α) : dans le premier cas, α^2+4 est résidu quadratique; dans le second cas, α^2+4 est non-résidu dans le champ (p^n).

Levi (*E.-E.*). — Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. (Sur un théorème d'existence pour les équations aux dérivées partielles du second ordre.) (287-333.)

L'auteur étend à l'équation générale

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

les résultats établis par divers auteurs au sujet de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

En supposant que, dans l'équation (1), F ait des dérivées des quatre premiers ordres finies et continues par rapport aux diverses variables, il existe, dans le domaine de l'origine, une solution et une seule nulle sur les deux axes de coordonnées et ayant des dérivées des quatre premiers ordres, pourvu que le rapport anharmonique des directions des caractéristiques de l'équation (1) à l'origine et des axes de coordonnées ne soit pas égal à 1 en module. Si l'équation donnée est analytique, la solution précédente l'est aussi.

M. E.-E. Lévi complète la théorie des caractéristiques en établissant, au point de vue des fonctions de variables réelles, des résultats établis par M. Goursat dans l'hypothèse de données analytiques.

Zindler (*K.*). — Réclamation de priorité.

Cette réclamation vise l'emploi fait par M. Sannia de deux formes quadratiques fondamentales dans l'étude des complexes de droites (*Annali*, t. XVII).

S. Lattès.

ACTA MATHEMATICA.

Tome 33, 1910.

Gambier (*B.*). — Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.

M. Painlevé a donné un Tableau des équations de la forme

$$y'' = R(y'; y, x)$$

(R rationnel en y', algébrique en y, analytique en x) dont l'intégrale est à points critiques fixes. L'auteur signale une omission dans ce Tableau, et étudie les équations ainsi obtenues par la méthode même de M. Painlevé.

Poincaré (*H.*). — Remarques diverses sur l'équation de Fredholm.

L'auteur obtient d'abord, par une méthode différente, plusieurs formules déjà

données par Fredholm, et relatives au développement de la fonction $D_{\lambda f}$ de Fredholm. M. Poincaré étudie ensuite le cas où le noyau devient infini, l'un des noyaux itérés restant partout fini, et donne dans ce cas l'expression de la solution ; enfin, le Mémoire se termine par l'étude de cas encore un peu plus généraux que le précédent.

Markoff (*A.*). — Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes.

L'auteur, employant une méthode due à Tchebycheff, démontre que l'intégrale de Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt$$

représente encore, dans le cas d'un nombre infini d'épreuves dépendantes, la probabilité pour que le nombre des cas favorables soit compris entre deux limites de la forme

$$\lim_{n=\infty}\left[np + t_1\sqrt{2pq\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)n}\right] \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty}\left[np + t_2\sqrt{2pq\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)n}\right],$$

n désignant le nombre des épreuves.

Cousin (*P.*). — Sur les fonctions triplement périodiques de deux variables.

M. Cousin introduit la notion d'un *invariant* pour $(n+1)$ systèmes de périodes, recherche l'expression analytique générale des fonctions méromorphes triplement périodiques, puis étudie des classes particulières de ces fonctions, dont les propriétés, relativement aux fonctions abéliennes, rappellent la dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques.

Stridsberg (*E.*). — Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes.

L'auteur étudie les propriétés arithmétiques de fonctions de Bessel, puis de quelques généralisations de la série hypergéométrique.

Helge von Koch. — Contribution à la théorie des nombres premiers.

En utilisant une expression nouvelle de la fonction numérique $\Psi(x)$ de Tchebycheff, l'auteur montre qu'il existe un rapport intime entre les nombres premiers inférieurs à x et les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ dont le module est inférieur à x; enfin il recherche quels termes il faut ajouter à x pour représenter $\Psi(x)$ avec une approximation donnée.

Federigo Enriques et Francisco Severi. — Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (*suite*).

Les auteurs étudient les surfaces hyperelliptiques régulières de rang 3, 4, 6, 8, 12 et 24, en s'appuyant sur les propriétés des transformations hermitiennes périodiques sur une surface de Jacobi, recherchent le genre de certaines de ces surfaces, leur transformation en surfaces du quatrième ordre, et terminent par des exemples.

Posse (*C.*). — Deux erreurs dans la Table des racines primitives de Wertheim.

Elles sont relatives à des racines primitives de 2161 et 3851.

Tome 34, 1911.

Nörlund (*N.-E.*). — Fractions continues et différences réciproques.

Ce Mémoire commence par l'étude des équations linéaires aux différences finies, par des méthodes analogues à celles employées pour les équations différentielles; en considérant ensuite les équations aux différences finies auxquelles satisfont les numérateurs et les dénominateurs des réduites d'une fraction continue, M. Nörlund en déduit des règles de convergence, qu'il applique ensuite à l'étude de certaines intégrales d'équations différentielles du second ordre, représentées par des fractions continues.

Dans le dernier Chapitre, l'auteur applique la théorie des différences réciproques au développement de certaines fonctions en fractions continues.

Perron (*O.*). — Ueber lineare Differenzengleichungen. (Sur les équations linéaires aux différences finies.)

Étude de la manière dont se comportent les intégrales d'une équation linéaire d'ordre n aux différences finies, lorsque certains des coefficients deviennent infinis.

Perron (*O.*). — Ueber lineare Differentialgleichungen mit rationaler Kœffizienten. (Sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.)

L'auteur applique les résultats du Mémoire précédent à la recherche des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, qui ne sont pas régulières au sens de Fuchs, mais dont cependant *quelques-unes* des intégrales particulières restent holomorphes en un point singulier des coefficients.

Cette recherche avait déjà été faite antérieurement par M. Helge von Koch, en s'appuyant sur la théorie des déterminants infinis.

Knopp (*K.*). — Divergenzcharactere gewisser Dirichlet'scher Reihen. (Caractères de divergence de certaines séries de Dirichlet.)

Ce Mémoire est une application des méthodes de M. Pringsheim (*Acta mathematica*, t. XXVIII), ainsi que des résultats obtenus par M. Cahen dans son Mémoire sur la fonction $\zeta(s)$, à l'étude de certaines séries de Dirichlet au voisinage de la limite de convergence.

Oseen (*C.-W.*). — Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'Hydrodynamique, et sur quelques-unes de leurs applications.

M. Oseen généralise les formules de Green, de manière à pouvoir les appliquer à l'étude du mouvement d'un fluide visqueux. Dans cette première Partie, l'auteur applique les formules généralisées, au cas d'un fluide visqueux incompressible.

Netto (*E.*). — Ueber Pfaffsche Aggregate. (Sur les agrégats de Pfaff.)

L'auteur montre, en s'appuyant sur les propriétés des agrégats de Pfaff, qu'on peut étendre la méthode de Cayley de manière à appliquer le mode de représentation qu'elle fournit, a un déterminant orthogonal *quelconque*.

Zaremba (*S.*). — Sur le principe de Dirichlet.

L'auteur retrouve, par une méthode nouvelle, les résultats déjà obtenus par M. Beppo Levi, par M. Fubini et par M. Lebesgue, sur les conditions d'exactitude du principe de Dirichlet.

Chazy (*J.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes.

Prenant d'abord l'équation simplifiée

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)y'y'' + c(y)y'^3,$$

M. Chazy donne la nature de l'intégrale quand $b(y)$ et $c(y)$ sont rationnels ; il étudie ensuite les équations à points critiques fixes du type

$$y''' = \mathrm{P}(y'', y', y, x),$$

où P est un polynome en y'', y', y à coefficients analytiques en x, puis les équations de la forme

$$y''' = \mathrm{R}(y'', y', y, x),$$

R étant rationnel en y'', y', y, à coefficients analytiques en x, et termine par quelques indications sur des équations à points critiques fixes du quatrième ordre et d'ordre supérieur.

Tome 35, 1912.

Poincaré (*H.*). — Rapport sur le prix Bolyai.

Rapport sur les travaux de M. David Hilbert, auquel est attribué le prix Bolyai.

Mittag-Leffler (*G.*). — Zur Biographie von Weierstrass. (Contribution à la biographie de Weierstrass.)

Recueil de divers extraits originaux de Weierstrass, tirés soit des manuscrits de ce savant, soit de lettres adressées à divers correspondants.

Fejér (*L.*). — Eine Bemerkung zur Mittag-Leffler'schen approximation einer beliebigen analytischen Funktion innerhalb des Sterngebietes. (Une remarque sur l'approximation, donnée par M. Mittag-Leffler, d'une fonction analytique quelconque à l'intérieur de l'étoile de convergence.)

L'auteur montre qu'étant donnée une fonction entière $f(x)$ dont le rayon de convergence n'est pas nul, on peut choisir la suite de fonctions de Mittag-Leffler

$$\Phi_0(x),\quad \Phi_1(x),\quad \ldots,\quad \Phi_n(x),\quad \ldots:\qquad \lim_{n=\infty} \Phi_n(x) = f(x),$$

de telle sorte que les $(n+1)$ premiers coefficients de $\Phi_n(x)$ soient respectivement égaux aux $(n+1)$ premiers coefficients de $f(x)$.

Buhl (*A.*). — Sur la représentation des fonctions méromorphes.

L'auteur envisage des séries de polynomes auxquelles conduit le prolongement analytique d'une fonction méromorphe, puis, après avoir étudié un cas particulier, M. Buhl montre que les résultats qu'il obtient ainsi par une méthode directe coïncident avec ceux que fournirait l'application d'une des intégrales curvilignes de M. Mittag-Leffler, dans le cas des fonctions meromorphes.

Oseen (*C.-W.*). — Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'Hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications (*suite*).

Dans la dernière Partie de son travail, M. Oseen applique les formules de Green généralisées, au cas d'un fluide visqueux et compressible.

Posse (*C.*). — Exposé succinct des résultats principaux du Mémoire posthume de Korkine, avec une Table des racines primitives et des caractères qui s'y rapportent, calculée par lui pour les nombres premiers inférieurs à 4000 et prolongée jusqu'à 5000.

Reproduction de la Table de Korkine, prolongée jusqu'à 5000, avec l'explication de sa construction et son application à la résolution des congruences binomes, d'après le Mémoire de Korkine.

Riesz (*M.*). — Sur la représentation analytique des fonctions définies par des séries de Dirichlet (Lettre à M. Mittag-Leffler).

En généralisant la méthode de M. Mittag-Leffler fondée sur l'emploi de l'intégrale de Laplace-Abel, l'auteur obtient des expressions limites qui, lorsqu'on les applique à la représentation d'une fonction non entière, sont telles que la frontière de convergence contienne nécessairement au moins un point singulier *à distance finie;* de plus il montre que, pour les séries de Dirichlet, la notion d'étoile principale joue le même rôle que pour les séries entières.

Landau (*E.*). — Ueber einige Summen, die von den Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion abhängen. [Sur quelques sommes qui dépendent des zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.]

$\Psi(x)$ étant la fonction de Tchebycheff, en posant

$$\varphi(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

$$\Psi(x) = \varphi(x) + O(\sqrt{x}),$$

M. Helge von Koch a démontré que, k et μ vérifiant les inégalités

$$1 < k < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 < \mu < 1,$$

on pouvait écrire

$$\Psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^{\mu}} \frac{x^{\rho}}{\rho} \Gamma\left(1 - \frac{\mu\rho \log x}{k x^{\mu}}\right) + O(x^{1-\mu} \log^2 x),$$

où $\rho = \alpha + \beta i$ désigne un zéro imaginaire de $\zeta(s)$. L'auteur demontre qu'on peut laisser de coté, dans la formule précedente, le facteur $\Gamma\left(1 - \frac{\mu\rho \log x}{k x^{\mu}}\right)$ et écrire, *même pour* $\mu = 1$,

$$\Psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^{\mu}} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O(x^{1-\mu} \log^2 x).$$

Vito Volterra. — Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.

L'auteur, employant une méthode qui se rattache à la fois à la théorie des solutions fondamentales de Green, et à celle qui consiste à regarder une equation intégrale comme un ensemble d'équations algébriques en nombre infini, étudie les équations intégro-différentielles du type elliptique ayant une ou deux limites variables, et en fait ensuite l'application aux phénomènes d'hérédité en élasticité et en électromagnétisme.

Schoue (*V.*). — Ueber den Zusammenhang zwischen den Summabilitätseigenschaften Dirichlet'scher Reihen und ihrem Funktionentheoretischen Charakter. (Sur la relation qui existe entre les propriétés sommatoires de séries de Dirichlet et leur caractère relativement à la théorie des fonctions.)

Généralisant des théorèmes dus à MM. Bohr, Riesz et Landau, l'auteur établit divers théorèmes sur l'ordre de sommabilité d'une série de Dirichlet.

Tome 36, 1912-1913.

Galbrun (*H.*). — Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable.

M. Galbrun considere une equation lineaire aux differences finies et forme des développements representant asymptotiquement les solutions, en ramenant son étude à celle d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes.

Fabry (*E.*). — Ordre des points singuliers de la série de Taylor.

Apres avoir montré que les notions d'ordre d'infinitude en un point singulier, et d'ordre d'infinitude dans le cercle de convergence, reposent sur des principes différents, l'auteur examine les consequences qu'on en déduit dans les divers cas qui peuvent se présenter.

Sundmann (*K.-F.*). — Mémoire sur le probleme des trois corps.

L'auteur donne ici une exposition d'ensemble de toutes ses recherches sur le probleme des trois corps. En prolongeant analytiquement les intégrales, pour toute valeur de t supérieure à celle qui correspond à un choc de deux seulement des corps, M. Sundmann montre qu'on peut ainsi definir de proche en proche le mouvement pour toute valeur de t comprise entre $-\infty$ et $+\infty$, à la seule condition que les constantes des aires ne soient pas nulles toutes les trois;

de plus, on peut alors indiquer une limite positive au-dessous de laquelle les deux plus grandes des distances entre les corps ne descendent jamais. La conclusion de M. Sundmann est résumée dans le théorème suivant :

Si les constantes des aires dans le mouvement des trois corps par rapport à leur centre de gravité ne sont pas toutes nulles, on peut trouver une variable τ telle que les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps soient développables en séries convergentes suivant les puissances de τ et qui représentent le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps, quels que soient les chocs qui se produisent sur les trois corps.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Recherches sur la théorie des équations.

L'auteur considère les équations transcendantes obtenues en égalant à zéro une série entière à coefficients réels, et appelle *type* d'une telle équation le nombre des paires de racines imaginaires conjuguées qu'elle possède. L'application d'un théorème de Cauchy, du théorème de Kolb, de ceux de Waring et de Poulain, conduisent M. Jensen, par des voies diverses, à quelques résultats sur le type d'une fonction entière.

Bohr (*H.*). — Lösung der absoluten Konvergenz problems einer allgemeinen Klasse Dirichlet'scher Reihen. (Solution du problème de la convergence absolue d'une classe étendue de séries de Dirichlet.)

Le but principal de ce travail est la démonstration du théorème suivant :

Soit donnée la suite

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots \qquad (\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty)$$

telle que, pour aucun entier positif N, *on ne puisse trouver de relation de la forme*

$$\sum_{i} g_i \lambda_i = 0,$$

les g_i étant des entiers non nuls, et soit la série de Dirichlet

$$f(s) = f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

relative à cette suite, et possédant un domaine de convergence. Pour que cette série soit absolument convergente pour $\sigma > \sigma_0$, il est nécessaire que la fonction analytique $f(s)$ soit, pour $\sigma > \sigma_0$, régulière et qu'on puisse, pour ces valeurs de σ, trouver un nombre positif k tel que

$$|f(s)| < k \qquad \text{pour} \qquad \sigma \geq \sigma_0.$$

Zoretti (*M.-L.*). — Contribution à l'étude des lignes cantoriennes.

M. Zoretti définit la notion de ligne, à un point de vue géométrique pur, en s'appuyant sur la théorie des ensembles de points et la notion de continu irréductible.

Pincherle (*S.*). — Quelques remarques sur les fonctions déterminantes.

L'auteur indique quelques propositions relatives à l'ordre de la fonction génératrice d'une fonction donnée, ainsi qu'aux relations qui existent entre le caractère asymptotique de la fonction génératrice et le caractère analytique de la fonction déterminante.

Lipschitz (*R.*). — Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable, et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima.

Traduction du Mémoire original de Lipschitz, faite par M. Paul Montel.

Malmquist (*J.*). — Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre.

M. Malmquist applique les résultats obtenus par M. Boutroux à l'étude de la nature d'une intégrale à un nombre fini de déterminations. Après avoir complétement résolu ce problème dans un cas particulier posé par M. Painlevé, l'auteur parvient à un résultat général sur la nature de certains points singuliers.

Lichtenstein (*L.*). — Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom ellliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe fur analytische Gebiete mit Ecken. (Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique. Le premier problème aux limites pour un problème analytique avec des points anguleux.)

L'auteur ramène le problème à la résolution d'une équation intégrale à noyau discontinu, en modifiant un peu une méthode due à M. Émile Picard.

P. Drolin.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

3e série, t. XXVIII, 1911 (1).

Tzitzéica (*G.*). — Sur certaines courbes gauches (9-32).

Les courbes étudiées sont celles qui jouissent de la propriété exprimée par l'équation

$$(1) \qquad Td^2 = \text{const.},$$

où T est l'inverse de la torsion en un point M de la courbe, et d le carré de la distance de M à l'origine des coordonnées. On a les propriétés suivantes :

Les coordonnées x, y, z de M exprimées au moyen d'un certain paramètre sont les intégrales d'une même équation

$$\theta''' = p\theta' + q\theta,$$

où q est constant. Réciproquement, trois intégrales quelconques de cette équation définissent une courbe jouissant de la propriété (1). En conséquence, après un court calcul : *La transformée d'une courbe jouissant de la propriété* (1), *par polaires réciproques relativement à une sphère qui a pour centre l'origine, jouit de la propriété* (1).

M. Tzitzéica dit que deux courbes C et C_1 sont transformées asymptotiques l'une de l'autre si elles sont lignes asymptotiques d'une même surface réglée. Alors, *si* C *jouit de la propriété* (1), *parmi les surfaces réglées passant par* C, *il y en a une infinité, dépendant d'une fonction arbitraire, sur lesquelles* C *est la seule ligne asymptotique jouissant de la propriété* (1); *une infinité d'autres, dépendant de trois paramètres, sur lesquelles* C *et une autre ligne asymptotique jouissent de la propriété* (1); *une infinité d'autres, dépendant de deux paramètres, dont toutes les lignes asymptotiques jouissent de la propriété* (1).

Ces surfaces réglées sont ensuite étudiées spécialement; leurs lignes *flecnodales*, c'est-à-dire le lieu des points par lesquels passent des tangentes rencontrant la surface en quatre points confondus au point de contact, jouissent de curieuses propriétés.

Riesz (*F.*). — Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales (33-62).

Ce Mémoire commence par donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $A(x)$ soit l'intégrale indéfinie d'une fonction à variation bornée. L'auteur désigne alors par Ω la totalité des fonctions, réelles ou non, con-

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLII, 1918, p. 23-38.

tinues dans l'intervalle (a, b), et définit la limite par la convergence uniforme; il dit qu'une opération fonctionnelle $\Lambda[f(x)]$ est continue si l'hypothèse

$$\lim f_i(x) = f(x)$$

entraîne $\lim \Lambda(f_i) = \Lambda(f)$. Enfin, l'opération est linéaire si

$$\Lambda(f) + \Lambda(\varphi) = \Lambda(f + \varphi).$$

Cela étant, M. Riesz, complétant un résultat de M. Hadamard, établit que toute opération fonctionnelle linéaire est une intégrale de Stieltjes

$$\Lambda[f(x)] = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Enfin M. Riesz introduit le système d'une infinité d'équations dont la considération est le but du Mémoire, c'est-à-dire

$$\int_a^b f_k(x)\, d\alpha(x) = c_k,$$

où la fonction à variation bornée $\alpha(x)$ est l'unique inconnue; il donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce système admette une solution.

Le résultat obtenu s'applique à diverses questions; par exemple au problème de reconnaître si toute fonction continue dans (a, b) peut être approchée indéfiniment et uniformément par les combinaisons linéaires d'une suite indéfinie de fonctions données $\varphi_k(x)$; il s'applique aussi, avec quelques compléments, à des généralisations du théorème de M. Picard sur l'existence des racines de l'équation $G(x) = a$, où $G(x)$ est une fonction entière.

Fejér (*L.*). — Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues (63-104).

Ce Mémoire est consacré à donner des exemples numériques simples de fonctions continues dont les séries de Fourier sont divergentes en des points isolés, ou en des points formant un ensemble partout dense (singularité de du Bois-Reymond), ou sont convergentes non uniformément dans les intervalles qui contiennent certains points (singularité de Lebesgue). Ces fonctions continues sont données dans ce travail par leurs séries de Fourier. Les résultats obtenus permettent d'obtenir des séries de Taylor présentant certaines particularités sur la circonférence de leur cercle de convergence.

Dans un appendice à son Mémoire, M. Fejér trouve très simplement, pour les *constantes de Lebesgue*,

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt,$$

l'expression

$$\varrho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \tang \frac{\nu\pi}{2n+1}.$$

Châtelet (A.). — Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres (105-202).

L'auteur de cet important travail a essayé d'introduire une certaine homogénéité dans divers raisonnements de la théorie des nombres, tels que celui de Dirichlet pour l'approximation des irrationnelles par des fractions, raisonnement qui peut s'étendre à l'approximation de plusieurs irrationnelles réelles ou même imaginaires; tels encore que l'antique méthode du développement en fraction continue, qui est une méthode de calcul effectif pour l'approximation des irrationnelles et pour la réduction des formes quadratiques binaires; tels enfin et surtout que la méthode d'Hermite, reposant sur l'introduction de paramètres continus dans certaines formes quadratiques définies. Toutefois, M. Châtelet a étendu cette méthode en considérant des fonctions homogènes d'ordre ω :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\xi_i|^{\omega} \qquad (\omega \geq 1)$$

ou même la fonction

$$\lim_{\omega = \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^{\omega} |\xi|^{\omega} \right)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Cette unification a été obtenue au moyen de la notation des *tableaux* carrés à n^2 éléments, par lesquels on peut représenter à volonté des systèmes de formes linéaires, des formes bilinéaires, des formes décomposables, des substitutions linéaires, etc. Reprenant la notion d'équivalence des tableaux introduite par Hermite, M. Châtelet a donné une notion générale de l'ensemble des tableaux réduits équivalant à un tableau donné. Il a ainsi retrouvé, au moyen des tableaux du deuxième ordre, une foule de résultats connus. Les tableaux du troisième ordre, au contraire, l'ont conduit à des résultats pour la plupart nouveaux.

Pour les nombres algébriques, les tableaux donnent un algorithme périodique, au sujet duquel M. Châtelet s'exprime ainsi : « La périodicité de cet algorithme peut se représenter dans le cas du deuxième ordre, et dans le cas du troisième ordre à deux colonnes imaginaires conjuguées, par le pavage d'une droite au moyen de segments égaux, dans le cas du troisième ordre réel par le pavage d'un plan au moyen de la translation d'un polygone, et ainsi de suite. »

Enfin M. Châtelet a été amené à établir entre les *entiers d'un ordre algébrique* et les tableaux à termes entiers de certains groupes abéliens une correspondance précieuse pour la simplification des calculs.

Villat (H.). — Sur la résistance des fluides (203-311).

On traite dans ce Mémoire le problème du mouvement plan permanent d'un fluide limité par une paroi fixe et indéfinie quelconque autour d'un obstacle immergé quelconque, dans le cas où l'on admet l'existence d'un sillage.

La méthode employée consiste à faire correspondre au champ occupé par le fluide en mouvement, c'est-à-dire sillage exclu, l'aire intérieure à une demi-

couronne circulaire, au moyen d'une représentation conforme. M. Villat réussit ainsi à trouver, dans tous les cas possibles, l'intégrale générale du problème, la forme de l'obstacle étant donnée.

Dans une deuxième partie, M. Villat traite le problème analogue dans le cas d'un fluide indéfini. Complétant les travaux de M. Levi-Civita, il exprime la solution générale du problème au moyen d'une fonction étroitement liée à la forme de l'obstacle. La méthode qu'il emploie dans ce but peut également s'appliquer au cas du fluide limité par une paroi fixe rectiligne indéfinie.

Ce Mémoire est à rapprocher d'un autre Mémoire du même auteur, paru dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1911.

Picard (*E.*). — Sur un exemple simple d'une équation singulière de Fredholm où la nature analytique de la solution dépend du second membre (313-324).

Guidé par la considération de l'équation aux dérivées partielles

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\lambda u+\varphi(x,y,z),$$

dont il se propose de trouver une solution de module limité dans tout l'espace, M. Picard obtient ce résultat : *Si $f(x,y,z)$ est une fonction continue et bornée dans tout l'espace, l'équation fonctionnelle*

$$u(x,y,z)-\frac{1-\lambda}{4\pi}\iiint u(\xi,\eta,\zeta)\frac{e^{-r}}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=f(x,y,z),$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'espace, et r^2 désignant

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

admet la solution

$$u(x,y,z)=f(x,y,z)-\frac{1-\lambda}{4\pi}\iiint\frac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r}f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

pour λ non réel et négatif, $\sqrt{\lambda}$ étant la détermination du radical ayant sa réelle positive.

Remplaçant f par une fonction d'une seule variable, on trouve l'*équation*

$$u(x)-\frac{1-\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-\xi|}u(\xi)\,d\xi=f(x),$$

dont une solution est

$$u(x)=f(x)+\frac{1-\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}f(\xi)\,d\xi.$$

Particularisant alors la fonction $f(x)$, M. Picard obtient pour $u(x)$ une valeur qui a des singularités variées sur l'axe réel négatif du plan des λ : ce sont par exemple des pôles, de position variable, ou encore des coupures essentielles tout le long de cet axe réel négatif ou le long de certains segments de cet axe.

M. Picard termine par la considération d'une équation différentielle, analogue à (1), et qui aurait pu conduire directement à l'équation fonctionnelle ne contenant qu'une intégrale simple.

Levi-Civita (*T.*). — Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du nœud lunaire (325-376).

Une étude des substitutions linéaires conduit M. Levi-Civita à ce théorème :

Considérons une solution quelconque Σ,

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

d'un système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dx}{dt} = a_{1,1}x + a_{1,2}y,$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{2,1}x + a_{2,2}y,$$

à coefficients périodiques, et le mouvement plan qu'elle définit. Soit z *l'anomalie* (angle polaire) *du point mobile. On peut toujours poser*

$$z = \omega t + \varepsilon(t),$$

$|\varepsilon(t)|$ *étant inférieur à un nombre indépendant de* t, *et* ω *étant une constante*. Cette constante est égale à $j + g$ ou à $j - g$, j étant entier, et g étant la détermination choisie pour le coefficient de $\sqrt{-1}\,t$ dans les exposants caractéristiques du système.

De là, l'auteur tire cette conclusion : *Si, dans l'équation linéaire*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = 0,$$

à coefficients périodiques, la valeur moyenne de $q - p^2$ *est positive, un intervalle de temps quelconque contient en moyenne* $2|j+g|$ *racines de* x *par période, d'autant plus exactement que cet intervalle est plus grand.*

Enfin, M. Levi-Civita applique ces considérations au mouvement de la lune. Son exposition, reposant sur des théories connues en bonne partie, lui permet d'établir en toute rigueur l'existence d'un *moyen mouvement* du nœud lunaire.

Boussinesq (*J.*). — Sur les vibrations longitudinales que produit, dans une barre élastique, la variation de ses températures (377-388).

M. Boussinesq reprend deux problèmes traités respectivement par MM. Roy et Annycke dans leurs Thèses (Roy, Paris, 1910; Annycke, Paris, 1911), savoir :

1° Mouvement longitudinal pris spontanément par une barre de longueur l, s'étendant de $x = 0$ à $x = l$, le long de l'axe des x, à bouts libres de toute pression sensible, mais en contact (par exemple) avec un liquide à la température zéro de l'atmosphère ambiante, quand cette barre, supposée portée initialement sans vitesses visibles, à des températures données, se refroidit peu à peu, par rayonnement ou par convection à travers sa surface latérale, et par contact à ses extrémités.

2° Mouvement analogue pris par la même barre, mais à bouts ($x = 0$, $x = l$) imperméables à la chaleur et fixés dans les situations respectives *de leur état naturel à la température zéro*, lorsque cette barre après avoir été portée de même, sans vitesses visibles, à des températures données, se refroidit par rayonnement ou convection dans l'atmosphère ambiante.

M. Boussinesq met en évidence des liens étroits entre les solutions de ces deux problèmes. Il traite de plus le cas où l'échauffement préalable, au lieu de se faire sans vitesses visibles, serait instantané, de telle sorte qu'il n'ait, au temps $t = 0$, amené encore aucune dilatation ni aucune vitesse.

Dienes (*Paul* et *Valérie*). — Recherches nouvelles sur les singularités des fonctions analytiques (389-457).

Ces recherches sont consacrées aux singularités des fonctions analytiques situées soit sur le cercle de convergence, soit aux sommets de l'étoile principale.

Les singularités étudiées sont des *points critiques algébrico-logarithmiques*.

Dans le premier Chapitre, concernant ceux de ces points qui sont sur le cercle de convergence, il est fait grand usage des méthodes de sommation par les moyennes arithmétiques des divers ordres, et des sommations exponentielles simple et généralisée de M. Borel : ces dernières méthodes permettent d'atteindre même les points critiques algébrico-logarithmiques situés sur le polygone de sommabilité. Les auteurs obtiennent des formules qui permettent de trouver simplement, à l'aide des coefficients de la série de Taylor, de quelle manière la fonction devient infinie.

Dans le second Chapitre, relatif aux points critiques algébrico-logarithmiques situés aux sommets de l'étoile principale, les auteurs se servent d'un mode de représentation de M. Mittag-Leffler, appliqué d'une façon particulière, à l'aide d'une fonction sommatrice étudiée par M. Lindelöf, et à l'aide d'une autre fonction due à M. Mittag-Leffler lui-même. Les résultats obtenus sont plus ou moins précis, selon la fonction employée.

Dans un troisième Chapitre, les auteurs étudient, par les mêmes procédés, l'*allure* de la fonction en un sommet de l'étoile, indépendamment de la singularité de la fonction en ce point.

Picard (*E.*). — Sur les équations intégrales de troisième espèce (459-472).

Il s'agit des équations intégrales de la forme

$$(1) \qquad A(x)f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = \varphi(x)$$

$f(x)$ est la fonction inconnue, dans le cas où $A(x)$ s'annule entre a et b On pose

$$(2) \qquad A(x) f(x) = F(x).$$

de sorte que (1) devient

$$(3) \qquad F(x) + \lambda \int_a^b \frac{K(x, y)}{A(y)} F(y)\, dy = \psi(x).$$

Puis on isole les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $A(y)$ au moyen d'intervalles $(\alpha_i - \varepsilon_i, \alpha_i + \eta_i)$: en retranchant ces intervalles du champ d'intégration, on obtient une équation de Fredholm ordinaire. Si alors les ε et les η tendent vers zéro, la solution de cette équation tend vers une limite, qui est *linéaire (fractionnaire) isolément par rapport aux m constantes*

$$C_i = \lim \log \frac{\eta_i}{\varepsilon_i}.$$

Dans le cas particulier de l'équation

$$(x - \alpha) f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = \psi(x) \qquad (a < \alpha < b),$$

M. Picard montre qu'il existe en général des valeurs singulières de λ pour lesquelles cette équation admet une solution $f(x)$ continue de a à b.

Cotton (*E.*). — Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles (473-521).

Un système de n équations différentielles contenant n fonctions inconnues z_1, $z_2, \ldots, z_n$ d'une variable t, on peut se proposer, à la suite de Poincaré, d'étudier les solutions qui tendent vers zéro ou qui restent assez voisines de zéro quand t augmente indéfiniment. La méthode employée ici par M. Cotton diffère de celle de ses prédécesseurs en ce qu'elle remplace le système donné par un système d'équations intégrales non linéaires, l'une des limites des intégrales étant variable.

M. Cotton retrouve ainsi des résultats déjà connus antérieurement, et même les étend : ainsi il ne suppose pas que les équations contiennent analytiquement les fonctions inconnues. Il démontre aussi des résultats entièrement nouveaux, en considérant des systèmes d'équations qui ne contiennent pas la variable indépendante, et dont une racine de l'équation caractéristique du système obtenu en réduisant les équations à leur partie linéaire est nulle, les parties réelles de toutes les autres racines étant différentes de zéro.

Le Roux (*J.*). — Étude géométrique de la torsion et de la flexion dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu (523-579).

L'objet de ce Mémoire est l'étude géométrique des éléments différentiels du second ordre d'une déformation. La connaissance de ces éléments peut paraître

aussi utile à la mécanique des milieux continus que celle de la courbure à la mécanique du point.

L'auteur considère d'abord la *torsion :* c'est la projection orthogonale sur une direction donnée de la dérivée géométrique de la rotation suivant cette direction. Il étudie la distribution des torsions pour les différentes directions et la représente par une *indicatrice*, qui est une quadrique. Introduisant ensuite d'autres éléments, *incurvation* et *flexion*, l'auteur arrive à trouver trois *flexions indépendantes*, nommées *dilation seconde*, *torsion*, *flexion cyclique*.

Le travail se termine par l'étude de la *flexion des surfaces*, c'est-à-dire de la flexion des lignes situées sur la surface. Cette étude introduit quelques notions nouvelles, très intéressantes, comme les précédentes, au point de vue géométrique.

Il est aussi question, dans ce Mémoire, des déformations finies, qui présentent de l'intérêt pour la résistance des matériaux.

GEORGES GIRAUD.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLII; 1918. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta mathematica. T. 27, 1903 (6-14); T. 32, 1909 (44-47); T. 33 à 36, 1910-1913 (66-74).

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. T. XXVI, 1909 (23-29); T. XXVII, 1910 (29-38); T. XXVIII, 1911 (75-82).

Annali di Matematica pura ed applicata. T. XVII, XVIII; 1910-1911 (57-66).

Atti del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. XLIV, 1904-1905 (47-57).

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. XVII, 1905 (38-44).

The quarterly Journal of pure and applied mathematics. T. XXXVIII, 1907 (14-22).

AVIS.

PICARD (Émile). — Avis à MM. les Rédacteurs d'analyses de Mémoires pour la « Revue des publications académiques et périodiques » 5

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Arcaïs (F. d'). 55.
Bachelier (L.). 34.
Baire (R.). 45.
Baker (H.-F.). 8.
Barbini (U.). 52-53.
Barnes (E.-W.). 16-17.
Basset (A.-B.). 14, 19, 21.
Bendixson (I.). 12-13.
Bernardi (F.). 48.
Bernstein. 3, 33.
Berry (A.). 8-9.
Bianchi (L.). 62, 65.
Bohr (H.). 73.
Borel (E.). 12.
Böttcher (L.). 29.
Boussinesq (J.). 29-30, 36, 79.
Bromwich (T.-J.). 18-19.
Bronwer (L.-E.-J.). 37.
Buhl (A.). 70.
Burgatti (P.). 40.
Burnside (H.). 11.
Calapso (P.). 42.
Cartan (E.). 24-25, 31.
Cattaneo (P.). 48, 54.
Châtelet (A.). 77.
Chazy (J.). 69-70.
Cissotti (U.). 53, 55.
Clairin (J.). 35-36.
Cotton (E.). 81.
Cousin (P.). 67.
Darboux (G.). 28.
Da Rios (L. S.). 55-56.
Dell'Agnola (C. A.). 47, 50.
Del Re (A.). 39-40.
Dickson (L. E.). 17, 21.
Dienes (Paul et Valérie). 80.
Dini (U.). 61, 64-65.
Dixon (A. C.). 16.
Enriquez (F.). 46-47. 68.
Fabry (E.). 72.
Fatou (P.). 30.
Favaro (A.). 47, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 56.
Fejér (L.). 70, 76.
Ferretti (G.). 43.
Franchir (M. de). 39.
Fréchet (M.). 32.
Fredholm (I.). 13-14.
Fubini (G.). 41, 53, 59.
Galbrun (H.). 72.
Gambier (B.). 66.
Giudice (F.). 41.
Giuletto (V.). 38.
Glaisher (J. W. L.). 19. 21.
Goursat (E.). 8.
Gram (J.-P.). 12.
Haag (J.). 33-34.
Hadamard (J.). 9.
Hardy (G.-H.). 22.
Hartogs (F.). 45.
Helge von Koch. 7, 67.
Hobson (E. H.). 10-11.
Iseli (F.). 57.
Jensen (J. L. W. V.). 73.
Jessop (C. M.). 21.
Jourdain (F.). 19, 22.
Kapteyn (W.). 13.
Knopp (K.). 69.
Korn (A.). 45.
Landau (E.). 71.
Lauricella (G.). 46.
Lebesgue (H.). 35.

Lerch (M.). 13.
Le Roux (J.). 81.
Levi (E. E.). 58-59, 62-63, 65-66.
Levi-Civita (T.). 48, 52, 56-57, 79.
Liapounoff (A.). 28.
Lichtenstein (L.). 74.
Lindelöf (E.). 12.
Liouville (R.). 7.
Lipschitz (R.). 74.
Lorenzoni (G.). 49.
Lori (F.). 54.
Loria (G.). 58-59.
Malmquist (J.). 74.
Mansion (P.). 13.
Marchis (L. de). 47, 50, 56.
Markoff (A.). 67.
Marletta (G.). 40, 44.
Mazzelli (C.). 49.
Miller (G.-A.). 17-18.
Mineo (C.). 42-43.
Minkowski (H.). 29.
Mittag-Leffler (G.). 70.
Montessus (R. de). 46.
Netto (E.). 69.
Nörlund (N. E.). 68.
Orlando (L.). 43.
Oscen (C. W.). 69-70.
Painlevé (P.). 6-7.
Paoletti (T.). 49.
Pascal (E.). 40, 51.
Perna (A.). 39.
Perron (O.). 65.
Petrovich (M.). 43.
Pexider (J.-V.). 41.
Picard (E.). 6, 13, 23, 37-38, 78, 80.
Pincherle (S.). 74.
Pizzetti (P.). 60-61.
Poincaré (H.). 30-31, 46, 66-67, 70.
Posse (C.). 68, 71.
Puglisi (M.). 43-44.
Rados (G.). 32.
Rémy (L.). 25-26.
Riesz (M.). 71.
Riesz (F.). 75.
Rossi (L. V.). 47, 50.
Routh (E.-J.). 16.
Ruyssian (C.). 59.
Sainte-Laguë (A.). 36-37.
Sanielevici (S.). 23-24.
Sannia (G.). 60.
Sartori (A.). 49-50.
Scarle (J.-H.-C.). 15.
Scarpis (U.). 65.
Schœnflies (A.). 46.
Schottky (F.). 12.
Schoue (V.). 72.
Schumacker (H.). 44.
Scorza (G.). 61.
Scrosoppi (P.). 51-52, 54.
Severi (F.). 39, 46-47, 51, 55, 68.
Severini (C.). 47, 48-49, 53.
Sibirani (F.). 53-54, 57.
Signorini (A.). 59.
Sinigallia (L.). 42.
Stäckel (P.). 8.
Stekloff (H.). 26-27.
Störmer (C.). 9-10.
Stridsberg (E.). 67.
Sundman (K. F.). 72.
Tedone (O.). 41, 60.
Toffoletti (C.). 41.
Tonelli (L). 63-64.
Toni (G.-B. de). 52.
Tonolo (A.). 57-78.
Torelli (R.). 56-57, 63.
Traynard. 25.
Tzitzëica (G.). 75.
Vergne (H.). 37.
Vessiot (E.). 27-28.
Villat (H.). 77.
Viterbi (A.). 54.
Vivanti (G.). 44.
Volterra (V.). 7-8, 72.
Watson (G. V.). 15-16.
Weber (H.). 11.
Young (W. H.). 15, 18, 19.
Zanon (G.-A.). 47, 50.
Zaremba (S.). 27, 69.
Zermelo (E.). 46.
Zindler (K.). 66.
Zoretti (L.). 29, 37, 74.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

Cahen (E.). 14.
Drouin (P.). 44, 66.
Garnier (R.). 38.
Giraud (G.). 23, 82.
Lattès (S). 65.
Michoux. 6.
Rindi (S.). 47.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
58198 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v.53

Bulletin des sciences
mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY